

# Inhaltsverzeichnis

## Tabellenverzeichnis

XXXIX

### 1 Arithmetik

1.1	Elementare Rechenregeln . . . . .	1
1.1.1	Zahlen . . . . .	1
1.1.1.1	Natürliche, ganze und rationale Zahlen . . . . .	1
1.1.1.2	Irrationale und transzendente Zahlen . . . . .	1
1.1.1.3	Reelle Zahlen . . . . .	2
1.1.1.4	Kettenbrüche . . . . .	3
1.1.1.5	Kommensurabilität . . . . .	4
1.1.2	Beweismethoden . . . . .	5
1.1.2.1	Direkter Beweis . . . . .	5
1.1.2.2	Indirekter Beweis oder Beweis durch Widerspruch . . . . .	5
1.1.2.3	Vollständige Induktion . . . . .	5
1.1.2.4	Konstruktiver Beweis . . . . .	6
1.1.3	Summen und Produkte . . . . .	6
1.1.3.1	Summen . . . . .	6
1.1.3.2	Produkte . . . . .	7
1.1.4	Potenzen, Wurzeln, Logarithmen . . . . .	8
1.1.4.1	Potenzen . . . . .	8
1.1.4.2	Wurzeln . . . . .	8
1.1.4.3	Logarithmen . . . . .	9
1.1.4.4	Spezielle Logarithmen . . . . .	9
1.1.5	Algebraische Ausdrücke . . . . .	10
1.1.5.1	Definitionen . . . . .	10
1.1.5.2	Einteilung der algebraischen Ausdrücke . . . . .	11
1.1.6	Ganzrationale Ausdrücke . . . . .	11
1.1.6.1	Darstellung in Form eines Polynoms . . . . .	11
1.1.6.2	Zerlegung eines Polynoms in Faktoren . . . . .	11
1.1.6.3	Spezielle Formeln . . . . .	12
1.1.6.4	Binomischer Satz . . . . .	12
1.1.6.5	Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier Polynome . . . . .	14
1.1.7	Gebrochenrationale Ausdrücke . . . . .	14
1.1.7.1	Rückführung auf die einfachste Form . . . . .	14
1.1.7.2	Bestimmung des ganzrationalen Anteils . . . . .	15
1.1.7.3	Partialbruchzerlegung . . . . .	15
1.1.7.4	Umformung von Proportionen . . . . .	17
1.1.8	Irrationale Ausdrücke . . . . .	17
1.2	Endliche Reihen . . . . .	18
1.2.1	Definition der endlichen Reihe . . . . .	18
1.2.2	Arithmetische Reihen . . . . .	18
1.2.3	Geometrische Reihe . . . . .	19
1.2.4	Spezielle endliche Reihen . . . . .	19
1.2.5	Mittelwerte . . . . .	19
1.2.5.1	Arithmetisches Mittel . . . . .	19
1.2.5.2	Geometrisches Mittel . . . . .	20
1.2.5.3	Harmonisches Mittel . . . . .	20
1.2.5.4	Quadratisches Mittel . . . . .	20

	1.2.5.5	Vergleich der Mittelwerte für zwei positive Größen $a$ und $b$ . . . . .	20
1.3		Finanzmathematik . . . . .	21
	1.3.1	Prozentrechnung . . . . .	21
	1.3.2	Zinseszinsrechnung . . . . .	22
	1.3.3	Tilgungsrechnung . . . . .	23
	1.3.3.1	Tilgung . . . . .	23
	1.3.3.2	Gleiche Tilgungsraten . . . . .	23
	1.3.3.3	Gleiche Annuitäten . . . . .	24
	1.3.4	Rentenrechnung . . . . .	24
	1.3.4.1	Rente . . . . .	24
	1.3.4.2	Nachschüssig konstante Rente . . . . .	25
	1.3.4.3	Kontostand nach $n$ Rentenzahlungen . . . . .	25
	1.3.5	Abschreibungen . . . . .	26
1.4		Ungleichungen . . . . .	28
	1.4.1	Reine Ungleichungen . . . . .	28
	1.4.1.1	Definitionen . . . . .	28
	1.4.1.2	Eigenschaften der Ungleichungen vom Typ I und II . . . . .	29
	1.4.2	Spezielle Ungleichungen . . . . .	30
	1.4.2.1	Dreiecksungleichung . . . . .	30
	1.4.2.2	Ungleichungen für den Absolutbetrag der Differenz zweier Zahlen . . . . .	30
	1.4.2.3	Ungleichung für das arithmetische und das geometrische Mittel . . . . .	30
	1.4.2.4	Ungleichung für das arithmetische und das quadratische Mittel . . . . .	30
	1.4.2.5	Ungleichungen für verschiedene Mittelwerte zweier reeller Zahlen . . . . .	30
	1.4.2.6	Bernoullische Ungleichung . . . . .	31
	1.4.2.7	Binomische Ungleichung . . . . .	31
	1.4.2.8	Cauchy-Schwarzsche Ungleichung . . . . .	31
	1.4.2.9	Tschebyscheffsche Ungleichung . . . . .	31
	1.4.2.10	Verallgemeinerte Tschebyscheffsche Ungleichung . . . . .	32
	1.4.2.11	Höldersche Ungleichung . . . . .	32
	1.4.2.12	Minkowskische Ungleichung . . . . .	33
	1.4.3	Lösung von Ungleichungen 1. und 2. Grades . . . . .	33
	1.4.3.1	Allgemeines . . . . .	33
	1.4.3.2	Ungleichungen 1. Grades . . . . .	33
	1.4.3.3	Ungleichungen 2. Grades . . . . .	33
	1.4.3.4	Allgemeiner Fall der Ungleichung 2. Grades . . . . .	34
1.5		Komplexe Zahlen . . . . .	34
	1.5.1	Imaginäre und komplexe Zahlen . . . . .	34
	1.5.1.1	Imaginäre Einheit . . . . .	34
	1.5.1.2	Komplexe Zahlen . . . . .	34
	1.5.2	Geometrische Darstellung . . . . .	35
	1.5.2.1	Vektordarstellung . . . . .	35
	1.5.2.2	Gleichheit komplexer Zahlen . . . . .	35
	1.5.2.3	Trigonometrische Form der komplexen Zahlen . . . . .	35
	1.5.2.4	Exponentialform einer komplexen Zahl . . . . .	36
	1.5.2.5	Konjugiert komplexe Zahlen . . . . .	36
	1.5.3	Rechnen mit komplexen Zahlen . . . . .	36
	1.5.3.1	Addition und Subtraktion . . . . .	36
	1.5.3.2	Multiplikation . . . . .	37
	1.5.3.3	Division . . . . .	37
	1.5.3.4	Allgemeine Regeln für die vier Grundrechenarten . . . . .	38
	1.5.3.5	Potenzieren einer komplexen Zahl . . . . .	38
	1.5.3.6	Radizieren oder Ziehen der $n$ -ten Wurzel aus einer komplexen Zahl . . . . .	38

1.6	Algebraische und transzendente Gleichungen . . . . .	38
1.6.1	Umformung algebraischer Gleichungen auf die Normalform . . . . .	38
1.6.1.1	Definitionen . . . . .	38
1.6.1.2	Systeme aus $n$ algebraischen Gleichungen . . . . .	39
1.6.1.3	Scheinbare Wurzeln . . . . .	39
1.6.2	Gleichungen 1. bis 4. Grades . . . . .	39
1.6.2.1	Gleichungen 1. Grades (lineare Gleichungen) . . . . .	39
1.6.2.2	Gleichungen 2. Grades (quadratische Gleichungen) . . . . .	40
1.6.2.3	Gleichungen 3. Grades (kubische Gleichungen) . . . . .	40
1.6.2.4	Gleichungen 4. Grades . . . . .	42
1.6.2.5	Gleichungen 5. und höheren Grades . . . . .	43
1.6.3	Gleichungen $n$ -ten Grades . . . . .	43
1.6.3.1	Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Gleichungen . . . . .	43
1.6.3.2	Gleichungen mit reellen Koeffizienten . . . . .	44
1.6.4	Rückführung transzendenter Gleichungen auf algebraische Gleichungen . . . . .	45
1.6.4.1	Definition . . . . .	45
1.6.4.2	Exponentialgleichungen . . . . .	46
1.6.4.3	Logarithmische Gleichungen . . . . .	46
1.6.4.4	Trigonometrische Gleichungen . . . . .	46
1.6.4.5	Gleichungen mit Hyperbelfunktionen . . . . .	47
<b>2</b>	<b>Funktionen und ihre Darstellung</b> . . . . .	<b>48</b>
2.1	Funktionsbegriff . . . . .	48
2.1.1	Definition der Funktion . . . . .	48
2.1.1.1	Funktion . . . . .	48
2.1.1.2	Reelle Funktion . . . . .	48
2.1.1.3	Funktion von mehreren Veränderlichen . . . . .	48
2.1.1.4	Komplexe Funktion . . . . .	48
2.1.1.5	Weitere Funktionen . . . . .	48
2.1.1.6	Funktionale . . . . .	48
2.1.1.7	Funktion und Abbildung . . . . .	49
2.1.2	Methoden zur Definition einer reellen Funktion . . . . .	49
2.1.2.1	Angabe einer Funktion . . . . .	49
2.1.2.2	Analytische Darstellung reeller Funktionen . . . . .	49
2.1.3	Einige Funktionstypen . . . . .	50
2.1.3.1	Monotone Funktionen . . . . .	50
2.1.3.2	Beschränkte Funktionen . . . . .	51
2.1.3.3	Extremwerte von Funktionen . . . . .	51
2.1.3.4	Gerade Funktionen . . . . .	51
2.1.3.5	Ungerade Funktionen . . . . .	51
2.1.3.6	Darstellung mit Hilfe gerader und ungerader Funktionen . . . . .	52
2.1.3.7	Periodische Funktionen . . . . .	52
2.1.3.8	Inverse oder Umkehrfunktionen . . . . .	52
2.1.4	Grenzwert von Funktionen . . . . .	53
2.1.4.1	Definition des Grenzwertes einer Funktion . . . . .	53
2.1.4.2	Zurückführung auf den Grenzwert einer Folge . . . . .	53
2.1.4.3	Konvergenzkriterium von Cauchy . . . . .	53
2.1.4.4	Unendlicher Grenzwert einer Funktion . . . . .	54
2.1.4.5	Linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert einer Funktion . . . . .	54
2.1.4.6	Grenzwert einer Funktion für $x$ gegen unendlich . . . . .	54
2.1.4.7	Sätze über Grenzwerte von Funktionen . . . . .	55
2.1.4.8	Berechnung von Grenzwerten . . . . .	55

2.1.4.9	Größenordnung von Funktionen und Landau-Symbole . . . . .	57
2.1.5	Stetigkeit einer Funktion . . . . .	58
2.1.5.1	Stetigkeit und Unstetigkeitsstelle . . . . .	58
2.1.5.2	Definition der Stetigkeit . . . . .	59
2.1.5.3	Häufig auftretende Arten von Unstetigkeiten . . . . .	59
2.1.5.4	Stetigkeit und Unstetigkeitspunkte elementarer Funktionen . . . . .	60
2.1.5.5	Eigenschaften stetiger Funktionen . . . . .	61
2.2	Elementare Funktionen . . . . .	62
2.2.1	Algebraische Funktionen . . . . .	62
2.2.1.1	Ganzrationale Funktionen (Polynome) . . . . .	62
2.2.1.2	Gebrochenrationale Funktionen . . . . .	62
2.2.1.3	Irrationale Funktionen . . . . .	63
2.2.2	Transzendente Funktionen . . . . .	63
2.2.2.1	Exponentialfunktionen . . . . .	63
2.2.2.2	Logarithmische Funktionen . . . . .	63
2.2.2.3	Trigonometrische Funktionen . . . . .	63
2.2.2.4	Inverse trigonometrische Funktionen . . . . .	63
2.2.2.5	Hyperbelfunktionen . . . . .	63
2.2.2.6	Inverse Hyperbelfunktionen . . . . .	63
2.2.3	Zusammengesetzte Funktionen . . . . .	63
2.3	Polynome . . . . .	64
2.3.1	Lineare Funktion . . . . .	64
2.3.2	Quadratisches Polynom . . . . .	64
2.3.3	Polynom 3. Grades . . . . .	64
2.3.4	Polynom $n$ -ten Grades . . . . .	65
2.3.5	Parabel $n$ -ter Ordnung . . . . .	66
2.4	Gebrochenrationale Funktionen . . . . .	66
2.4.1	Spezielle gebrochen lineare Funktion . . . . .	66
2.4.2	Gebrochenlineare Funktion . . . . .	66
2.4.3	Kurve 3. Ordnung, Typ I . . . . .	67
2.4.4	Kurve 3. Ordnung, Typ II . . . . .	67
2.4.5	Kurve 3. Ordnung, Typ III . . . . .	69
2.4.6	Reziproke Potenz . . . . .	70
2.5	Irrationale Funktionen . . . . .	71
2.5.1	Quadratwurzel aus einem linearen Binom . . . . .	71
2.5.2	Quadratwurzel aus einem quadratischen Polynom . . . . .	71
2.5.3	Potenzfunktion . . . . .	71
2.6	Exponentialfunktionen und logarithmische Funktionen . . . . .	72
2.6.1	Exponentialfunktion . . . . .	72
2.6.2	Logarithmische Funktionen . . . . .	72
2.6.3	Gaußsche Glockenkurve . . . . .	73
2.6.4	Exponentialsumme . . . . .	73
2.6.5	Verallgemeinerte Gaußsche Glockenkurve . . . . .	74
2.6.6	Produkt aus Potenz- und Exponentialfunktion . . . . .	75
2.7	Trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen) . . . . .	76
2.7.1	Grundlagen . . . . .	76
2.7.1.1	Definition und Darstellung . . . . .	76
2.7.1.2	Wertebereiche und Funktionsverläufe . . . . .	78
2.7.2	Wichtige Formeln für trigonometrische Funktionen . . . . .	80
2.7.2.1	Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen . . . . .	80
2.7.2.2	Trigonometrische Funktionen der Summe und der Differenz zweier Winkel (Additionstheoreme) . . . . .	80

2.7.2.3	Trigonometrische Funktionen für Winkelvielfache . . . . .	81
2.7.2.4	Trigonometrische Funktionen des halben Winkels . . . . .	82
2.7.2.5	Summen und Differenzen zweier trigonometrischer Funktionen . . . . .	82
2.7.2.6	Produkte trigonometrischer Funktionen . . . . .	82
2.7.2.7	Potenzen trigonometrischer Funktionen . . . . .	83
2.7.3	Beschreibung von Schwingungen . . . . .	83
2.7.3.1	Problemstellung . . . . .	83
2.7.3.2	Superposition oder Überlagerung von Schwingungen . . . . .	83
2.7.3.3	Vektordiagramm für Schwingungen . . . . .	84
2.7.3.4	Dämpfung von Schwingungen . . . . .	84
2.8	Zyklometrische Funktionen (Arkusfunktionen) . . . . .	85
2.8.1	Definition der zyklometrischen Funktionen . . . . .	85
2.8.2	Zurückführung auf die Hauptwerte . . . . .	85
2.8.3	Beziehungen zwischen den Hauptwerten . . . . .	86
2.8.4	Formeln für negative Argumente . . . . .	87
2.8.5	Summe und Differenz von $\arcsin x$ und $\arcsin y$ . . . . .	87
2.8.6	Summe und Differenz von $\arccos x$ und $\arccos y$ . . . . .	87
2.8.7	Summe und Differenz von $\arctan x$ und $\arctan y$ . . . . .	87
2.8.8	Spezielle Beziehungen für $\arcsin x$ , $\arccos x$ , $\arctan x$ . . . . .	88
2.9	Hyperbelfunktionen . . . . .	88
2.9.1	Definition der Hyperbelfunktionen . . . . .	88
2.9.2	Graphische Darstellung der Hyperbelfunktionen . . . . .	89
2.9.2.1	Hyperbelsinus . . . . .	89
2.9.2.2	Hyperbelkosinus . . . . .	89
2.9.2.3	Hyperbeltangens . . . . .	90
2.9.2.4	Hyperbelkotangens . . . . .	90
2.9.3	Wichtige Formeln für Hyperbelfunktionen . . . . .	90
2.9.3.1	Hyperbelfunktionen einer Variablen . . . . .	90
2.9.3.2	Darstellung einer Hyperbelfunktion durch eine andere gleichen Argumentes . . . . .	90
2.9.3.3	Formeln für negative Argumente . . . . .	90
2.9.3.4	Hyperbelfunktionen der Summe und der Differenz zweier Argumente (Additionstheoreme) . . . . .	91
2.9.3.5	Hyperbelfunktionen des doppelten Arguments . . . . .	91
2.9.3.6	Formel von Moivre für Hyperbelfunktionen . . . . .	91
2.9.3.7	Hyperbelfunktionen des halben Arguments . . . . .	91
2.9.3.8	Summen und Differenzen von Hyperbelfunktionen . . . . .	91
2.9.3.9	Zusammenhang zwischen den Hyperbel- und den trigonometrischen Funktionen mit Hilfe komplexer Argumente . . . . .	92
2.10	Areafunktionen . . . . .	92
2.10.1	Definitionen . . . . .	92
2.10.1.1	Areasinus . . . . .	92
2.10.1.2	Areakosinus . . . . .	92
2.10.1.3	Areatangens . . . . .	93
2.10.1.4	Areakotangens . . . . .	93
2.10.2	Darstellung der Areafunktionen durch den natürlichen Logarithmus . . . . .	93
2.10.3	Beziehungen zwischen den verschiedenen Areafunktionen . . . . .	94
2.10.4	Summen und Differenzen von Areafunktionen . . . . .	94
2.10.5	Formeln für negative Argumente . . . . .	94
2.11	Kurven dritter Ordnung . . . . .	95
2.11.1	Semikubische Parabel . . . . .	95
2.11.2	Versiera der Agnesi . . . . .	95

2.11.3	Kartesisches Blatt	96
2.11.4	Zissoide	96
2.11.5	Strophoide	96
2.12	Kurven vierter Ordnung	97
2.12.1	Konchoide des Nikomedes	97
2.12.2	Allgemeine Konchoide	98
2.12.3	Pascalsche Schnecke	98
2.12.4	Kardioide	99
2.12.5	Cassinische Kurven	100
2.12.6	Lemniskate	101
2.13	Zykloiden	101
2.13.1	Gewöhnliche Zykloide	101
2.13.2	Verlängerte und verkürzte Zykloiden oder Trochoiden	102
2.13.3	Epizykloide	103
2.13.4	Hypozykloide und Astroide	104
2.13.5	Verlängerte und verkürzte Epizykloide und Hypozykloide	105
2.14	Spiralen	105
2.14.1	Archimedische Spirale	105
2.14.2	Hyperbolische Spirale	106
2.14.3	Logarithmische Spirale	106
2.14.4	Evolvente des Kreises	107
2.14.5	Klothoide	107
2.15	Verschiedene andere Kurven	108
2.15.1	Kettenlinie oder Katenoide	108
2.15.2	Schleppkurve oder Traktrix	108
2.16	Aufstellung empirischer Kurven	109
2.16.1	Verfahrensweise	109
2.16.1.1	Kurvenbildervergleiche	109
2.16.1.2	Rektifizierung	109
2.16.1.3	Parameterbestimmung	109
2.16.2	Gebräuchlichste empirische Formeln	110
2.16.2.1	Potenzfunktionen	110
2.16.2.2	Exponentialfunktionen	110
2.16.2.3	Quadratisches Polynom	111
2.16.2.4	Gebrochenlineare Funktion	112
2.16.2.5	Quadratwurzel aus einem quadratischen Polynom	112
2.16.2.6	Verallgemeinerte Gaußsche Glockenkurve	113
2.16.2.7	Kurve 3. Ordnung, Typ II	113
2.16.2.8	Kurve 3. Ordnung, Typ III	113
2.16.2.9	Kurve 3. Ordnung, Typ I	113
2.16.2.10	Produkt aus Potenz- und Exponentialfunktion	114
2.16.2.11	Exponentialsumme	114
2.16.2.12	Vollständig durchgerechnetes Beispiel	115
2.17	Skalen und Funktionspapiere	116
2.17.1	Skalen	116
2.17.2	Funktionspapiere	118
2.17.2.1	Einfach-logarithmisches Funktionspapier	118
2.17.2.2	Doppelt-logarithmisches Funktionspapier	118
2.17.2.3	Funktionspapier mit einer reziproken Skala	118
2.17.2.4	Hinweis	119
2.18	Funktionen von mehreren Veränderlichen	120
2.18.1	Definition und Darstellung	120

2.18.1.1	Darstellung von Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . . .	120
2.18.1.2	Geometrische Darstellung von Funktionen mehrerer Veränderlicher	120
2.18.2	Verschiedene ebene Definitionsbereiche . . . . .	121
2.18.2.1	Definitionsbereich einer durch eine Menge gegebenen Funktion . .	121
2.18.2.2	Zweidimensionale Gebiete . . . . .	121
2.18.2.3	Drei- und mehrdimensionale Gebiete . . . . .	121
2.18.2.4	Methoden zur Definition einer Funktion . . . . .	121
2.18.2.5	Formen der analytischen Darstellung einer Funktion . . . . .	123
2.18.2.6	Abhängigkeit von Funktionen . . . . .	124
2.18.3	Grenzwerte . . . . .	125
2.18.3.1	Definition . . . . .	125
2.18.3.2	Exakte Formulierung . . . . .	125
2.18.3.3	Verallgemeinerung auf mehrere Veränderliche . . . . .	125
2.18.3.4	Iterierte Grenzwerte . . . . .	125
2.18.4	Stetigkeit . . . . .	126
2.18.5	Eigenschaften stetiger Funktionen . . . . .	126
2.18.5.1	Nullstellensatz von Bolzano . . . . .	126
2.18.5.2	Zwischenwertsatz . . . . .	126
2.18.5.3	Satz über die Beschränktheit einer Funktion . . . . .	126
2.18.5.4	Satz von Weierstrass über die Existenz des größten und kleinsten Funktionswertes . . . . .	126
2.19	Nomographie . . . . .	127
2.19.1	Nomogramme . . . . .	127
2.19.2	Netztafeln . . . . .	127
2.19.3	Fluchtlinientafeln . . . . .	128
2.19.3.1	Fluchtlinientafeln mit drei geraden Skalen durch einen Punkt . . .	128
2.19.3.2	Fluchtlinientafeln mit zwei parallelen und einer dazu geeigneten geradlinigen Skala . . . . .	129
2.19.3.3	Fluchtlinientafeln mit zwei parallelen, geradlinigen Skalen und einer Kurvenskala . . . . .	129
2.19.4	Netztafeln für mehr als drei Veränderliche . . . . .	130
<b>3</b>	<b>Geometrie</b> . . . . .	<b>131</b>
3.1	Planimetrie . . . . .	131
3.1.1	Grundbegriffe . . . . .	131
3.1.1.1	Punkt, Gerade, Strahl, Strecke . . . . .	131
3.1.1.2	Winkel . . . . .	131
3.1.1.3	Winkel an zwei sich schneidenden Geraden . . . . .	132
3.1.1.4	Winkelpaare an geschnittenen Parallelen . . . . .	132
3.1.1.5	Winkel im Gradmaß und im Bogenmaß . . . . .	133
3.1.2	Geometrische Definition der Kreis- und Hyperbel-Funktionen . . . . .	133
3.1.2.1	Definition der Kreis- oder trigonometrischen Funktionen . . . . .	133
3.1.2.2	Geometrische Definition der Hyperbelfunktionen . . . . .	134
3.1.3	Ebene Dreiecke . . . . .	135
3.1.3.1	Aussagen zu ebenen Dreiecken . . . . .	135
3.1.3.2	Symmetrie . . . . .	136
3.1.4	Ebene Vierecke . . . . .	138
3.1.4.1	Parallelogramm . . . . .	138
3.1.4.2	Rechteck und Quadrat . . . . .	138
3.1.4.3	Rhombus oder Raute . . . . .	138
3.1.4.4	Trapez . . . . .	138
3.1.4.5	Allgemeines Viereck . . . . .	139

	3.1.4.6	Sehnenviereck . . . . .	139
	3.1.4.7	Tangentenviereck . . . . .	140
3.1.5		Ebene Vielecke oder Polygone . . . . .	140
	3.1.5.1	Allgemeines Vieleck . . . . .	140
	3.1.5.2	Regelmäßige konvexe Vielecke . . . . .	140
	3.1.5.3	Einige regelmäßige konvexe Vielecke . . . . .	141
3.1.6		Ebene Kreisfiguren . . . . .	142
	3.1.6.1	Kreis . . . . .	142
	3.1.6.2	Kreisabschnitt (Kreissegment) und Kreisabschnitt (Kreissektor) . . . . .	144
	3.1.6.3	Kreisring . . . . .	144
3.2		Ebene Trigonometrie . . . . .	145
	3.2.1	Dreiecksberechnungen . . . . .	145
	3.2.1.1	Berechnungen in rechtwinkligen ebenen Dreiecken . . . . .	145
	3.2.1.2	Berechnungen in ebenen schiefwinkligen Dreiecken . . . . .	145
	3.2.2	Geodätische Anwendungen . . . . .	148
	3.2.2.1	Geodätische Koordinaten . . . . .	148
	3.2.2.2	Winkel in der Geodäsie . . . . .	149
	3.2.2.3	Vermessungstechnische Anwendungen . . . . .	151
3.3		Stereometrie . . . . .	154
	3.3.1	Geraden und Ebenen im Raum . . . . .	154
	3.3.2	Kanten, Ecken, Raumwinkel . . . . .	155
	3.3.3	Polyeder . . . . .	156
	3.3.4	Körper, die durch gekrümmte Flächen begrenzt sind . . . . .	159
3.4		Sphärische Trigonometrie . . . . .	163
	3.4.1	Grundbegriffe der Geometrie auf der Kugel . . . . .	163
	3.4.1.1	Kurven, Bogen und Winkel auf der Kugel . . . . .	163
	3.4.1.2	Spezielle Koordinatensysteme . . . . .	165
	3.4.1.3	Sphärisches Zweieck . . . . .	166
	3.4.1.4	Sphärisches Dreieck . . . . .	166
	3.4.1.5	Polardreieck . . . . .	167
	3.4.1.6	Eulersche und Nicht-Eulersche Dreiecke . . . . .	168
	3.4.1.7	Dreikant . . . . .	168
	3.4.2	Haupteigenschaften sphärischer Dreiecke . . . . .	168
	3.4.2.1	Allgemeine Aussagen . . . . .	168
	3.4.2.2	Grundformeln und Anwendungen . . . . .	169
	3.4.2.3	Weitere Formeln . . . . .	172
	3.4.3	Berechnung sphärischer Dreiecke . . . . .	173
	3.4.3.1	Grundaufgaben, Genauigkeitsbetrachtungen . . . . .	173
	3.4.3.2	Rechtwinklig sphärisches Dreieck . . . . .	173
	3.4.3.3	Schiefwinklig sphärisches Dreieck . . . . .	175
	3.4.3.4	Sphärische Kurven . . . . .	179
3.5		Vektoralgebra und analytische Geometrie . . . . .	185
	3.5.1	Vektoralgebra . . . . .	185
	3.5.1.1	Definition des Vektors . . . . .	185
	3.5.1.2	Rechenregeln . . . . .	186
	3.5.1.3	Skalarprodukt und Vektorprodukt . . . . .	188
	3.5.1.4	Mehrfache multiplikative Verknüpfungen . . . . .	190
	3.5.1.5	Vektorielle Gleichungen . . . . .	192
	3.5.1.6	Kovariante und kontravariante Koordinaten eines Vektors . . . . .	193
	3.5.1.7	Geometrische Anwendungen der Vektoralgebra . . . . .	194
	3.5.2	Analytische Geometrie der Ebene . . . . .	195
	3.5.2.1	Ebene Koordinatensysteme . . . . .	195

	3.5.2.2	Koordinatentransformationen	196
	3.5.2.3	Spezielle Punkte in der Ebene	197
	3.5.2.4	Flächeninhalte	199
	3.5.2.5	Gleichung einer Kurve	199
	3.5.2.6	Gerade	200
	3.5.2.7	Kreis	203
	3.5.2.8	Ellipse	204
	3.5.2.9	Hyperbel	206
	3.5.2.10	Parabel	209
	3.5.2.11	Kurven 2. Ordnung (Kegelschnitte)	211
3.5.3		Analytische Geometrie des Raumes	214
	3.5.3.1	Grundlagen, räumliche Koordinatensysteme	214
	3.5.3.2	Transformation rechtwinkliger Koordinaten	217
	3.5.3.3	Euler-Winkel	219
	3.5.3.4	Teilung einer Strecke	220
	3.5.3.5	System aus vier Punkten	221
	3.5.3.6	Gleichung einer Fläche	221
	3.5.3.7	Ebenen im Raum	222
	3.5.3.8	Geraden im Raum	225
	3.5.3.9	Schnittpunkte und Winkel von Ebenen und Geraden	226
	3.5.3.10	Flächen 2. Ordnung, Gleichungen in Normalform	227
	3.5.3.11	Flächen 2. Ordnung, allgemeine Theorie	231
3.5.4		Geometrische Transformationen und Koordinatentransformationen	233
	3.5.4.1	Geometrische 2D-Transformationen	233
	3.5.4.2	Homogene Koordinaten, Matrixdarstellung	235
	3.5.4.3	Koordinatentransformation	235
	3.5.4.4	Verkettung von Transformationen	236
	3.5.4.5	3D-Transformationen	237
	3.5.4.6	Deformationstransformationen	240
3.5.5		Planare Projektionen	241
	3.5.5.1	Klassifizierung	241
	3.5.5.2	Ansichtskoordinatensystem	242
	3.5.5.3	Tafelprojektionen	242
	3.5.5.4	Axonometrische Projektion	243
	3.5.5.5	Isometrische Projektion	243
	3.5.5.6	Schiefe Parallelprojektion	244
	3.5.5.7	Perspektivische Projektion	245
3.6		Differentialgeometrie	247
	3.6.1	Ebene Kurven	247
	3.6.1.1	Definitionen ebener Kurven	247
	3.6.1.2	Lokale Elemente einer Kurve	247
	3.6.1.3	Ausgezeichnete Kurvenpunkte und Asymptoten	253
	3.6.1.4	Allgemeine Untersuchung einer Kurve nach ihrer Gleichung	258
	3.6.1.5	Evoluten und Evolventen	259
	3.6.1.6	Einhüllende von Kurvenscharen	259
	3.6.2	Raumkurven	260
	3.6.2.1	Definitionen für Raumkurven	260
	3.6.2.2	Begleitendes Dreibein	261
	3.6.2.3	Krümmung und Windung	263
	3.6.3	Flächen	266
	3.6.3.1	Definitionen für Flächen	266
	3.6.3.2	Tangentialebene und Flächennormale	267

3.6.3.3	Linienelement auf einer Fläche . . . . .	268
3.6.3.4	Krümmung einer Fläche . . . . .	270
3.6.3.5	Regelflächen und abwickelbare Flächen . . . . .	272
3.6.3.6	Geodätische Linien auf einer Fläche . . . . .	273
<b>4</b>	<b>Lineare Algebra . . . . .</b>	<b>274</b>
4.1	Matrizen . . . . .	274
4.1.1	Begriff der Matrix . . . . .	274
4.1.2	Quadratische Matrizen . . . . .	275
4.1.3	Vektoren . . . . .	276
4.1.4	Rechenoperationen mit Matrizen . . . . .	277
4.1.5	Rechenregeln für Matrizen . . . . .	280
4.1.6	Vektor- und Matrixnormen . . . . .	281
4.1.6.1	Vektornormen . . . . .	281
4.1.6.2	Matrixnormen . . . . .	282
4.2	Determinanten . . . . .	282
4.2.1	Definitionen . . . . .	282
4.2.2	Rechenregeln für Determinanten . . . . .	283
4.2.3	Berechnung von Determinanten . . . . .	284
4.3	Tensoren . . . . .	285
4.3.1	Transformation des Koordinatensystems . . . . .	285
4.3.2	Tensoren in kartesischen Koordinaten . . . . .	285
4.3.3	Tensoren mit speziellen Eigenschaften . . . . .	287
4.3.3.1	Tensoren 2. Stufe . . . . .	287
4.3.3.2	Invariante Tensoren . . . . .	288
4.3.4	Tensoren in krummlinigen Koordinatensystemen . . . . .	289
4.3.4.1	Kovariante und kontravariante Basisvektoren . . . . .	289
4.3.4.2	Kovariante und kontravariante Koordinaten von Tensoren 1. Stufe . . . . .	289
4.3.4.3	Kovariante, kontravariante und gemischte Koordinaten von Tensoren 2. Stufe . . . . .	290
4.3.4.4	Rechenregeln . . . . .	291
4.3.5	Pseudotensoren . . . . .	292
4.3.5.1	Punktspiegelung am Koordinatenursprung . . . . .	292
4.3.5.2	Einführung des Begriffs Pseudotensor . . . . .	293
4.4	Quaternionen und Anwendungen . . . . .	294
4.4.1	Quaternionen . . . . .	294
4.4.1.1	Definition und Darstellung . . . . .	294
4.4.1.2	Matrizendarstellung von Quaternionen . . . . .	296
4.4.1.3	Rechenregeln . . . . .	296
4.4.2	Darstellung von Drehungen im $\mathbf{R}^3$ . . . . .	299
4.4.2.1	Drehungen um die Koordinatenachsen . . . . .	299
4.4.2.2	Cardan-Winkel . . . . .	299
4.4.2.3	Euler-Winkel . . . . .	300
4.4.2.4	Drehung um eine beliebige Achse . . . . .	300
4.4.2.5	Drehungen und Quaternionen . . . . .	301
4.4.2.6	Quaternionen und Cardan-Winkel . . . . .	303
4.4.2.7	Effizienz der Algorithmen . . . . .	305
4.4.3	Anwendungen der Quaternionen . . . . .	306
4.4.3.1	3D-Rotationen in der Computergraphik . . . . .	306
4.4.3.2	Quaternioneninterpolation . . . . .	307
4.4.3.3	Interpolation mittels Rotationsmatrizen . . . . .	308
4.4.3.4	Stereographische Projektion . . . . .	308

	4.4.3.5	Satellitennavigation . . . . .	308
	4.4.3.6	Vektoranalysis . . . . .	309
	4.4.3.7	Einheitsbiquaternionen und Starrkörperbewegungen . . . . .	310
4.5		Lineare Gleichungssysteme . . . . .	311
	4.5.1	Lineare Systeme, Austauschverfahren . . . . .	311
	4.5.1.1	Lineare Systeme . . . . .	311
	4.5.1.2	Austauschverfahren . . . . .	311
	4.5.1.3	Lineare Abhängigkeiten . . . . .	312
	4.5.1.4	Invertierung einer Matrix . . . . .	312
	4.5.2	Lösung linearer Gleichungssysteme . . . . .	312
	4.5.2.1	Definition und Lösbarkeit . . . . .	312
	4.5.2.2	Anwendung des Austauschverfahrens . . . . .	314
	4.5.2.3	Cramersche Regel . . . . .	315
	4.5.2.4	Gaußscher Algorithmus . . . . .	316
	4.5.3	Überbestimmte lineare Gleichungssysteme . . . . .	317
	4.5.3.1	Überbestimmte lineare Gleichungssysteme und lineare Quadratmittelprobleme . . . . .	317
	4.5.3.2	Hinweise zur numerischen Lösung linearer Quadratmittelprobleme . . . . .	318
4.6		Eigenwertaufgaben bei Matrizen . . . . .	318
	4.6.1	Allgemeines Eigenwertproblem . . . . .	318
	4.6.2	Spezielles Eigenwertproblem . . . . .	318
	4.6.2.1	Charakteristisches Polynom . . . . .	318
	4.6.2.2	Reelle symmetrische Matrizen, Ähnlichkeitstransformationen . . . . .	320
	4.6.2.3	Hauptachsentransformation quadratischer Formen . . . . .	321
	4.6.2.4	Hinweise zur numerischen Bestimmung von Eigenwerten . . . . .	323
	4.6.3	Singulärwertzerlegung . . . . .	325
<b>5</b>		<b>Algebra und Diskrete Mathematik</b>	<b>326</b>
5.1		Logik . . . . .	326
	5.1.1	Aussagenlogik . . . . .	326
	5.1.2	Ausdrücke der Prädikatenlogik . . . . .	329
5.2		Mengenlehre . . . . .	330
	5.2.1	Mengenbegriff, spezielle Mengen . . . . .	330
	5.2.2	Operationen mit Mengen . . . . .	332
	5.2.3	Relationen und Abbildungen . . . . .	334
	5.2.4	Äquivalenz- und Ordnungsrelationen . . . . .	337
	5.2.5	Mächtigkeit von Mengen . . . . .	338
5.3		Klassische algebraische Strukturen . . . . .	339
	5.3.1	Operationen . . . . .	339
	5.3.2	Halbgruppen . . . . .	339
	5.3.3	Gruppen . . . . .	340
	5.3.3.1	Definition und grundlegende Eigenschaften . . . . .	340
	5.3.3.2	Untergruppen und direkte Produkte . . . . .	341
	5.3.3.3	Abbildungen zwischen Gruppen . . . . .	343
	5.3.4	Darstellung von Gruppen . . . . .	344
	5.3.4.1	Definitionen . . . . .	344
	5.3.4.2	Spezielle Darstellungen . . . . .	344
	5.3.4.3	Direkte Summe von Darstellungen . . . . .	345
	5.3.4.4	Direktes Produkt von Darstellungen . . . . .	346
	5.3.4.5	Reduzible und irreduzible Darstellungen . . . . .	346
	5.3.4.6	Erstes Schursches Lemma . . . . .	347
	5.3.4.7	Clebsch–Gordan–Reihe . . . . .	347

	5.3.4.8	Irreduzible Darstellung der symmetrischen Gruppe $S_M$ . . . . .	347
5.3.5		Anwendungen von Gruppen . . . . .	348
	5.3.5.1	Symmetrioperationen, Symmetrieelemente . . . . .	348
	5.3.5.2	Symmetriegruppen . . . . .	348
	5.3.5.3	Symmetrioperationen bei Molekülen . . . . .	349
	5.3.5.4	Symmetriegruppen in der Kristallographie . . . . .	351
	5.3.5.5	Symmetriegruppen in der Quantenmechanik . . . . .	353
	5.3.5.6	Weitere Anwendungsbeispiele aus der Physik . . . . .	353
5.3.6		Lie-Gruppen und Lie-Algebren . . . . .	354
	5.3.6.1	Einführung . . . . .	354
	5.3.6.2	Matrix-Lie-Gruppen . . . . .	355
	5.3.6.3	Wichtige Anwendungen . . . . .	356
	5.3.6.4	Lie-Algebra . . . . .	358
	5.3.6.5	Anwendungen in der Robotik . . . . .	360
5.3.7		Ringe und Körper . . . . .	363
	5.3.7.1	Definitionen . . . . .	363
	5.3.7.2	Unterringe, Ideale . . . . .	363
	5.3.7.3	Homomorphismen, Isomorphismen, Homomorphiesatz . . . . .	364
	5.3.7.4	Endliche Körper und Schieberegister . . . . .	364
5.3.8		Vektorräume . . . . .	367
	5.3.8.1	Definition . . . . .	367
	5.3.8.2	Lineare Abhängigkeit . . . . .	367
	5.3.8.3	Lineare Abbildungen . . . . .	367
	5.3.8.4	Unterräume, Dimensionsformel . . . . .	368
	5.3.8.5	Euklidische Vektorräume, Euklidische Norm . . . . .	368
	5.3.8.6	Lineare Operatoren in Vektorräumen . . . . .	369
5.4		Elementare Zahlentheorie . . . . .	370
	5.4.1	Teilbarkeit . . . . .	370
	5.4.1.1	Teilbarkeit und elementare Teilbarkeitsregeln . . . . .	370
	5.4.1.2	Primzahlen . . . . .	370
	5.4.1.3	Teilbarkeitskriterien . . . . .	372
	5.4.1.4	Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches . . . . .	373
	5.4.1.5	Fibonacci-Zahlen . . . . .	374
	5.4.2	Lineare Diophantische Gleichungen . . . . .	375
	5.4.3	Kongruenzen und Restklassen . . . . .	377
	5.4.4	Sätze von Fermat, Euler und Wilson . . . . .	381
	5.4.5	Codierungen . . . . .	381
	5.4.5.1	Prüfzeichenverfahren . . . . .	382
	5.4.5.2	Fehlerkorrigierende Codes . . . . .	383
5.5		Kryptologie . . . . .	386
	5.5.1	Aufgabe der Kryptologie . . . . .	386
	5.5.2	Kryptosysteme . . . . .	386
	5.5.3	Mathematische Präzisierung . . . . .	386
	5.5.4	Sicherheit von Kryptosystemen . . . . .	387
	5.5.4.1	Methoden der klassischen Kryptologie . . . . .	387
	5.5.4.2	Affine Substitutionen . . . . .	388
	5.5.4.3	Vigenere-Chiffre . . . . .	388
	5.5.4.4	Matrixsubstitutionen . . . . .	388
	5.5.5	Methoden der klassischen Kryptoanalyse . . . . .	389
	5.5.5.1	Statistische Analyse . . . . .	389
	5.5.5.2	Kasiski-Friedman-Test . . . . .	389
	5.5.6	One-Time-Tape . . . . .	390

5.5.7	Verfahren mit öffentlichem Schlüssel . . . . .	390
5.5.7.1	Konzept von Diffie und Hellman . . . . .	390
5.5.7.2	Einwegfunktionen . . . . .	391
5.5.7.3	RSA-Verfahren . . . . .	391
5.5.8	AES-Algorithmus (Advanced Encryption Standard) . . . . .	392
5.5.9	IDEA-Algorithmus (International Data Encryption Algorithm) . . . . .	392
5.6	Universelle Algebra . . . . .	393
5.6.1	Definition . . . . .	393
5.6.2	Kongruenzrelationen, Faktoralgebren . . . . .	393
5.6.3	Homomorphismen . . . . .	393
5.6.4	Homomorphiesatz . . . . .	394
5.6.5	Varietäten . . . . .	394
5.6.6	Termalgebren, freie Algebren . . . . .	394
5.7	Boolesche Algebren und Schaltalgebra . . . . .	395
5.7.1	Definition . . . . .	395
5.7.2	Dualitätsprinzip . . . . .	395
5.7.3	Endliche Boolesche Algebren . . . . .	396
5.7.4	Boolesche Algebren als Ordnungen . . . . .	396
5.7.5	Boolesche Funktionen, Boolesche Ausdrücke . . . . .	396
5.7.6	Normalformen . . . . .	398
5.7.7	Schaltalgebra . . . . .	398
5.8	Algorithmen der Graphentheorie . . . . .	401
5.8.1	Grundbegriffe und Bezeichnungen . . . . .	401
5.8.2	Durchlaufungen von ungerichteten Graphen . . . . .	404
5.8.2.1	Kantenfolgen . . . . .	404
5.8.2.2	Eulersche Linien . . . . .	405
5.8.2.3	Hamilton-Kreise . . . . .	406
5.8.3	Bäume und Gerüste . . . . .	407
5.8.3.1	Bäume . . . . .	407
5.8.3.2	Gerüste . . . . .	408
5.8.4	Matchings . . . . .	409
5.8.5	Planare Graphen . . . . .	410
5.8.6	Bahnen in gerichteten Graphen . . . . .	411
5.8.7	Transportnetze . . . . .	412
5.9	Fuzzy-Logik . . . . .	414
5.9.1	Grundlagen der Fuzzy-Logik . . . . .	414
5.9.1.1	Interpretation von Fuzzy-Mengen (Unschärfe Mengen) . . . . .	414
5.9.1.2	Zugehörigkeitsfunktionen . . . . .	415
5.9.1.3	Fuzzy-Mengen . . . . .	417
5.9.2	Verknüpfungen unscharfer Mengen . . . . .	418
5.9.2.1	Konzept für eine Verknüpfung (Aggregation) unscharfer Mengen . . . . .	419
5.9.2.2	Praktische Verknüpfungen unscharfer Mengen . . . . .	419
5.9.2.3	Kompensatorische Operatoren . . . . .	422
5.9.2.4	Erweiterungsprinzip . . . . .	422
5.9.2.5	Unschärfe Komplementfunktion . . . . .	422
5.9.3	Fuzzy-wertige Relationen . . . . .	423
5.9.3.1	Fuzzy-Relationen . . . . .	423
5.9.3.2	Fuzzy-Relationenprodukt $R \circ S$ . . . . .	425
5.9.4	Fuzzy-Inferenz . . . . .	426
5.9.5	Defuzzifizierungsmethoden . . . . .	428
5.9.6	Wissensbasierte Fuzzy-Systeme . . . . .	429
5.9.6.1	Methode Mamdani . . . . .	429

5.9.6.2	Methode Sugeno . . . . .	429
5.9.6.3	Kognitive Systeme . . . . .	430
5.9.6.4	Wissensbasiertes Interpolationssystem . . . . .	432
<b>6</b>	<b>Differentialrechnung</b>	<b>434</b>
6.1	Differentiation von Funktionen einer Veränderlichen . . . . .	434
6.1.1	Differentialquotient . . . . .	434
6.1.2	Differentiationsregeln für Funktionen einer Veränderlicher . . . . .	435
6.1.2.1	Ableitungen elementarer Funktionen . . . . .	435
6.1.2.2	Grundregeln für das Differenzieren . . . . .	435
6.1.3	Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	441
6.1.3.1	Definition der Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	441
6.1.3.2	Ableitungen höherer Ordnung der einfachsten Funktionen . . . . .	441
6.1.3.3	Leibnizsche Regel . . . . .	441
6.1.3.4	Höhere Ableitungen von Funktionen in Parameterdarstellung . . . . .	442
6.1.3.5	Ableitungen höherer Ordnung der inversen Funktion . . . . .	442
6.1.4	Hauptsätze der Differentialrechnung . . . . .	443
6.1.4.1	Monotoniebedingungen . . . . .	443
6.1.4.2	Satz von Fermat . . . . .	443
6.1.4.3	Satz von Rolle . . . . .	444
6.1.4.4	Mittelwertsatz der Differentialrechnung . . . . .	444
6.1.4.5	Satz von Taylor für Funktionen von einer Veränderlichen . . . . .	445
6.1.4.6	Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung . . . . .	445
6.1.5	Bestimmung von Extremwerten und Wendepunkten . . . . .	445
6.1.5.1	Maxima und Minima . . . . .	445
6.1.5.2	Notwendige Bedingung für die Existenz eines relativen Extremwertes . . . . .	446
6.1.5.3	Relative Extremwerte einer differenzierbaren, explizit gegebenen Funktion $y = f(x)$ . . . . .	446
6.1.5.4	Bestimmung der globalen Extremwerte . . . . .	447
6.1.5.5	Bestimmung der Extremwerte einer implizit gegebenen Funktion . . . . .	447
6.2	Differentiation von Funktionen von mehreren Veränderlichen . . . . .	448
6.2.1	Partielle Ableitungen . . . . .	448
6.2.1.1	Partielle Ableitung einer Funktion . . . . .	448
6.2.1.2	Geometrische Bedeutung bei zwei Veränderlichen . . . . .	448
6.2.1.3	Begriff des Differentials . . . . .	448
6.2.1.4	Haupteigenschaften des Differentials . . . . .	449
6.2.1.5	Partielles Differential . . . . .	450
6.2.2	Vollständiges Differential und Differentiale höherer Ordnung . . . . .	450
6.2.2.1	Begriff des vollständigen Differentials einer Funktion von mehreren Veränderlichen (totales Differential) . . . . .	450
6.2.2.2	Ableitungen und Differentiale höherer Ordnungen . . . . .	451
6.2.2.3	Satz von Taylor für Funktionen von mehreren Veränderlichen . . . . .	452
6.2.3	Differentiationsregeln für Funktionen von mehreren Veränderlichen . . . . .	453
6.2.3.1	Differentiation von zusammengesetzten Funktionen . . . . .	453
6.2.3.2	Differentiation impliziter Funktionen . . . . .	453
6.2.4	Substitution von Variablen in Differentialausdrücken und Koordinatentransformationen . . . . .	455
6.2.4.1	Funktion von einer Veränderlichen . . . . .	455
6.2.4.2	Funktion zweier Veränderlicher . . . . .	456
6.2.5	Extremwerte von Funktionen von mehreren Veränderlichen . . . . .	457
6.2.5.1	Definition . . . . .	457
6.2.5.2	Geometrische Bedeutung . . . . .	457

6.2.5.3	Bestimmung der Extremwerte einer Funktion von zwei Veränderlichen	458
6.2.5.4	Bestimmung der Extremwerte einer Funktion von $n$ Veränderlichen	458
6.2.5.5	Lösung von Approximationsaufgaben	458
6.2.5.6	Bestimmung der Extremwerte unter Vorgabe von Nebenbedingungen	459
<b>7</b>	<b>Unendliche Reihen</b>	<b>460</b>
7.1	Zahlenfolgen	460
7.1.1	Eigenschaften von Zahlenfolgen	460
7.1.1.1	Definition der Zahlenfolge	460
7.1.1.2	Monotone Zahlenfolgen	460
7.1.1.3	Beschränkte Folgen	460
7.1.2	Grenzwerte von Zahlenfolgen	461
7.2	Reihen mit konstanten Gliedern	462
7.2.1	Allgemeine Konvergenzsätze	462
7.2.1.1	Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen	462
7.2.1.2	Allgemeine Sätze über die Konvergenz von Reihen	463
7.2.2	Konvergenzkriterien für Reihen mit positiven Gliedern	463
7.2.2.1	Vergleichskriterium	463
7.2.2.2	Quotientenkriterium von d'Alembert	464
7.2.2.3	Wurzelkriterium von Cauchy	464
7.2.2.4	Integralkriterium von Cauchy	465
7.2.3	Absolute und bedingte Konvergenz	465
7.2.3.1	Definition	465
7.2.3.2	Eigenschaften absolut konvergenter Reihen	466
7.2.3.3	Alternierende Reihen	466
7.2.4	Einige spezielle Reihen	467
7.2.4.1	Summenwerte einiger Reihen mit konstanten Gliedern	467
7.2.4.2	Bernoullische und Eulersche Zahlen	468
7.2.5	Abschätzung des Reihenrestes	469
7.2.5.1	Abschätzung mittels Majorante	469
7.2.5.2	Alternierende konvergente Reihen	470
7.2.5.3	Spezielle Reihen	470
7.3	Funktionsreihen	470
7.3.1	Definitionen	470
7.3.2	Gleichmäßige Konvergenz	471
7.3.2.1	Definition, Satz von Weierstrass	471
7.3.2.2	Eigenschaften gleichmäßig konvergenter Reihen	472
7.3.3	Potenzreihen	472
7.3.3.1	Definition, Konvergenz	472
7.3.3.2	Rechnen mit Potenzreihen	473
7.3.3.3	Entwicklung in Taylor-Reihen, MacLaurinsche Reihe	474
7.3.4	Näherungsformeln	475
7.3.5	Asymptotische Potenzreihen	475
7.3.5.1	Asymptotische Gleichheit	475
7.3.5.2	Asymptotische Potenzreihen	475
7.4	Fourier-Reihen	477
7.4.1	Trigonometrische Summe und Fourier-Reihe	477
7.4.1.1	Grundbegriffe	477
7.4.1.2	Wichtigste Eigenschaften von Fourier-Reihen	478
7.4.2	Koeffizientenbestimmung für symmetrische Funktionen	479
7.4.2.1	Symmetrien verschiedener Art	479

7.4.2.2	Formen der Entwicklung in eine Fourier-Reihe . . . . .	480
7.4.3	Koeffizientenbestimmung mit Hilfe numerischer Methoden . . . . .	480
7.4.4	Fourier-Reihe und Fourier-Integral . . . . .	481
7.4.5	Hinweise zur Tabelle einiger Fourier-Entwicklungen . . . . .	482
<b>8</b>	<b>Integralrechnung</b> . . . . .	<b>483</b>
8.1	Unbestimmtes Integral . . . . .	483
8.1.1	Stammfunktion oder Integral . . . . .	483
8.1.1.1	Unbestimmte Integrale . . . . .	484
8.1.1.2	Integrale elementarer Funktionen . . . . .	484
8.1.2	Integrationsregeln . . . . .	484
8.1.3	Integration rationaler Funktionen . . . . .	488
8.1.3.1	Integrale ganzrationaler Funktionen (Polynome) . . . . .	488
8.1.3.2	Integrale gebrochenrationaler Funktionen . . . . .	488
8.1.3.3	Vier Fälle bei der Partialbruchzerlegung . . . . .	488
8.1.4	Integration irrationaler Funktionen . . . . .	491
8.1.4.1	Substitution zur Rückführung auf Integrale rationaler Funktionen . . . . .	491
8.1.4.2	Integration binomischer Integranden . . . . .	492
8.1.4.3	Elliptische Integrale . . . . .	492
8.1.5	Integration trigonometrischer Funktionen . . . . .	494
8.1.5.1	Substitution . . . . .	494
8.1.5.2	Vereinfachte Methoden . . . . .	494
8.1.6	Integration weiterer transzendenter Funktionen . . . . .	495
8.1.6.1	Integrale mit Exponentialfunktionen . . . . .	495
8.1.6.2	Integrale mit Hyperbelfunktionen . . . . .	495
8.1.6.3	Anwendung der partiellen Integration . . . . .	496
8.1.6.4	Integrale transzendenter Funktionen . . . . .	496
8.2	Bestimmte Integrale . . . . .	496
8.2.1	Grundbegriffe, Regeln und Sätze . . . . .	496
8.2.1.1	Definition und Existenz des bestimmten Integrals . . . . .	496
8.2.1.2	Eigenschaften bestimmter Integrale . . . . .	497
8.2.1.3	Weitere Sätze über Integrationsgrenzen . . . . .	499
8.2.1.4	Berechnung bestimmter Integrale . . . . .	501
8.2.2	Anwendungen bestimmter Integrale . . . . .	503
8.2.2.1	Allgemeines Prinzip zur Anwendung des bestimmten Integrals . . . . .	503
8.2.2.2	Anwendungen in der Geometrie . . . . .	504
8.2.2.3	Anwendungen in Mechanik und Physik . . . . .	506
8.2.3	Uneigentliche Integrale, Stieltjes- und Lebesgue-Integrale . . . . .	509
8.2.3.1	Verallgemeinerungen des Integralbegriffs . . . . .	509
8.2.3.2	Integrale mit unendlichen Integrationsgrenzen . . . . .	510
8.2.3.3	Integrale mit unbeschränktem Integranden . . . . .	512
8.2.4	Parameterintegrale . . . . .	515
8.2.4.1	Definition des Parameterintegrals . . . . .	515
8.2.4.2	Differentiation unter dem Integralzeichen . . . . .	515
8.2.4.3	Integration unter dem Integralzeichen . . . . .	515
8.2.5	Integration durch Reihenentwicklung, spezielle nichtelementare Funktionen . . . . .	516
8.3	Kurvenintegrale . . . . .	518
8.3.1	Kurvenintegrale 1. Art . . . . .	519
8.3.1.1	Definitionen . . . . .	519
8.3.1.2	Existenzsatz . . . . .	519
8.3.1.3	Berechnung des Kurvenintegrals 1. Art . . . . .	520
8.3.1.4	Anwendungen des Kurvenintegrals 1. Art . . . . .	521

8.3.2	Kurvenintegrale 2. Art . . . . .	521
8.3.2.1	Definitionen . . . . .	521
8.3.2.2	Existenzsatz . . . . .	522
8.3.2.3	Berechnung der Kurvenintegrale 2. Art . . . . .	522
8.3.3	Kurvenintegrale allgemeiner Art . . . . .	523
8.3.3.1	Definition . . . . .	523
8.3.3.2	Eigenschaften des Kurvenintegrals allgemeiner Art . . . . .	523
8.3.3.3	Umlaufintegral . . . . .	524
8.3.4	Unabhängigkeit des Kurvenintegrals vom Integrationsweg . . . . .	524
8.3.4.1	Zweidimensionaler Fall . . . . .	524
8.3.4.2	Existenz der Stammfunktion . . . . .	525
8.3.4.3	Dreidimensionaler Fall . . . . .	525
8.3.4.4	Berechnung der Stammfunktion . . . . .	525
8.4	Mehrfachintegrale . . . . .	527
8.4.1	Doppelintegral . . . . .	527
8.4.1.1	Begriff des Doppelintegrals . . . . .	527
8.4.1.2	Berechnung des Doppelintegrals . . . . .	528
8.4.1.3	Anwendungen von Doppelintegralen . . . . .	530
8.4.2	Dreifachintegral . . . . .	530
8.4.2.1	Begriff des Dreifachintegrals . . . . .	530
8.4.2.2	Berechnung des Dreifachintegrals . . . . .	531
8.4.2.3	Anwendungen von Dreifachintegralen . . . . .	535
8.5	Oberflächenintegrale . . . . .	535
8.5.1	Oberflächenintegrale 1. Art . . . . .	535
8.5.1.1	Begriff des Oberflächenintegrals 1. Art . . . . .	535
8.5.1.2	Berechnung des Oberflächenintegrals 1. Art . . . . .	537
8.5.1.3	Anwendungen des Oberflächenintegrals 1. Art . . . . .	538
8.5.2	Oberflächenintegrale 2. Art . . . . .	538
8.5.2.1	Begriff des Oberflächenintegrals 2. Art . . . . .	538
8.5.2.2	Berechnung des Oberflächenintegrals 2. Art . . . . .	540
8.5.3	Oberflächenintegral allgemeiner Art . . . . .	541
8.5.3.1	Begriff des Oberflächenintegrals allgemeiner Art . . . . .	541
8.5.3.2	Eigenschaften des Oberflächenintegrals . . . . .	541
<b>9</b>	<b>Differentialgleichungen</b> . . . . .	<b>543</b>
9.1	Gewöhnliche Differentialgleichungen . . . . .	543
9.1.1	Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	544
9.1.1.1	Existenzsatz, Richtungsfeld . . . . .	544
9.1.1.2	Wichtige Integrationsmethoden . . . . .	545
9.1.1.3	Implizite Differentialgleichungen . . . . .	548
9.1.1.4	Singuläre Integrale und singuläre Punkte . . . . .	549
9.1.1.5	Näherungsmethoden zur Integration von Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	552
9.1.2	Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systeme von Differentialgleichungen . . . . .	554
9.1.2.1	Grundlegende Betrachtungen . . . . .	554
9.1.2.2	Erniedrigung der Ordnung . . . . .	555
9.1.2.3	Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung . . . . .	557
9.1.2.4	Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	559
9.1.2.5	Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	561
9.1.2.6	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung . . . . .	564

9.1.3	Randwertprobleme . . . . .	572
9.1.3.1	Problemstellung . . . . .	572
9.1.3.2	Haupteigenschaften der Eigenfunktionen und Eigenwerte . . . . .	573
9.1.3.3	Entwicklung nach Eigenfunktionen . . . . .	574
9.1.3.4	Singuläre Fälle . . . . .	574
9.2	Partielle Differentialgleichungen . . . . .	575
9.2.1	Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	575
9.2.1.1	Lineare partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	575
9.2.1.2	Nichtlineare partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	577
9.2.2	Lineare partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung . . . . .	580
9.2.2.1	Klassifikation und Eigenschaften der Differentialgleichungen 2. Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen . . . . .	580
9.2.2.2	Klassifikation und Eigenschaften der Differentialgleichungen 2. Ordnung mit mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen . . . . .	582
9.2.2.3	Integrationsmethoden für lineare partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung . . . . .	583
9.2.3	Partielle Differentialgleichungen aus Naturwissenschaft und Technik . . . . .	593
9.2.3.1	Problemstellungen und Randbedingungen . . . . .	593
9.2.3.2	Wellengleichung . . . . .	595
9.2.3.3	Wärmeleitungs- und Diffusionsgleichung für ein homogenes Medium . . . . .	596
9.2.3.4	Potentialgleichung . . . . .	597
9.2.4	Schrödinger-Gleichung . . . . .	597
9.2.4.1	Begriff der Schrödinger-Gleichung . . . . .	597
9.2.4.2	Zeitabhängige Schrödinger-Gleichung . . . . .	598
9.2.4.3	Zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung . . . . .	598
9.2.4.4	Statistische Interpretation der Wellenfunktion . . . . .	599
9.2.4.5	Kräftefreie Bewegung eines Teilchens in einem Quader . . . . .	601
9.2.4.6	Teilchenbewegung im symmetrischen Zentralfeld . . . . .	603
9.2.4.7	Linearer harmonischer Oszillator . . . . .	606
9.2.5	Nichtlineare partielle Differentialgleichungen: Solitonen, periodische Muster und Chaos . . . . .	608
9.2.5.1	Physikalisch-mathematische Problemstellung . . . . .	608
9.2.5.2	Korteweg-de Vries-Gleichung . . . . .	610
9.2.5.3	Nichtlineare Schrödinger-Gleichung . . . . .	611
9.2.5.4	Sinus-Gordon-Gleichung . . . . .	612
9.2.5.5	Weitere nichtlineare Evolutionsgleichungen mit Solitonlösungen . . . . .	614
<b>10</b>	<b>Variationsrechnung . . . . .</b>	<b>615</b>
10.1	Aufgabenstellung . . . . .	615
10.2	Historische Aufgaben . . . . .	616
10.2.1	Isoperimetrisches Problem . . . . .	616
10.2.2	Brachistochronenproblem . . . . .	616
10.3	Variationsaufgaben mit Funktionen einer Veränderlichen . . . . .	617
10.3.1	Einfache Variationsaufgabe und Extremale . . . . .	617
10.3.2	Eulersche Differentialgleichung der Variationsrechnung . . . . .	617
10.3.3	Variationsaufgaben mit Nebenbedingungen . . . . .	619
10.3.4	Variationsaufgaben mit höheren Ableitungen . . . . .	620
10.3.5	Variationsaufgaben mit mehreren gesuchten Funktionen . . . . .	620
10.3.6	Variationsaufgaben in Parameterdarstellung . . . . .	621
10.4	Variationsaufgaben mit Funktionen von mehreren Veränderlichen . . . . .	622
10.4.1	Einfache Variationsaufgabe . . . . .	622
10.4.2	Allgemeinere Variationsaufgaben . . . . .	623

10.5	Numerische Lösung von Variationsaufgaben . . . . .	623
10.6	Ergänzungen . . . . .	625
10.6.1	Erste und zweite Variation . . . . .	625
10.6.2	Anwendungen in der Physik . . . . .	625
<b>11</b>	<b>Lineare Integralgleichungen</b> . . . . .	<b>626</b>
11.1	Einführung und Klassifikation . . . . .	626
11.2	Fredholmsche Integralgleichungen 2. Art . . . . .	627
11.2.1	Integralgleichungen mit ausgearteten Kernen . . . . .	627
11.2.2	Methode der sukzessiven Approximation, Neumann-Reihe . . . . .	630
11.2.3	Fredholmsche Lösungsmethode, Fredholmsche Sätze . . . . .	632
11.2.3.1	Fredholmsche Lösungsmethode . . . . .	632
11.2.3.2	Fredholmsche Sätze . . . . .	634
11.2.4	Numerische Verfahren für Fredholmsche Integralgleichungen 2. Art . . . . .	635
11.2.4.1	Approximation des Integrals . . . . .	635
11.2.4.2	Kernapproximation . . . . .	637
11.2.4.3	Kollokationsmethode . . . . .	639
11.3	Fredholmsche Integralgleichungen 1. Art . . . . .	641
11.3.1	Integralgleichungen mit ausgearteten Kernen . . . . .	641
11.3.2	Begriffe, analytische Grundlagen . . . . .	642
11.3.3	Zurückführung der Integralgleichung auf ein lineares Gleichungssystem . . . . .	643
11.3.4	Lösung der homogenen Integralgleichung 1. Art . . . . .	645
11.3.5	Konstruktion zweier spezieller Orthonormalsysteme zu einem gegebenen Kern . . . . .	646
11.3.6	Iteratives Verfahren . . . . .	647
11.4	Volterrasche Integralgleichungen . . . . .	648
11.4.1	Theoretische Grundlagen . . . . .	648
11.4.2	Lösung durch Differentiation . . . . .	649
11.4.3	Neumannsche Reihe zur Lösung der Volterraschen Integralgleichungen 2. Art . . . . .	650
11.4.4	Volterrasche Integralgleichungen vom Faltungstyp . . . . .	651
11.4.5	Numerische Behandlung Volterrascher Integralgleichungen 2. Art . . . . .	652
11.5	Singuläre Integralgleichungen . . . . .	654
11.5.1	Abelsche Integralgleichung . . . . .	654
11.5.2	Singuläre Integralgleichungen mit Cauchy-Kernen . . . . .	655
11.5.2.1	Formulierung der Aufgabe . . . . .	655
11.5.2.2	Existenz einer Lösung . . . . .	656
11.5.2.3	Eigenschaften des Cauchy-Integrals . . . . .	656
11.5.2.4	Hilbertsches Randwertproblem . . . . .	656
11.5.2.5	Lösung des Hilbertschen Randwertproblems . . . . .	657
11.5.2.6	Lösung der charakteristischen Integralgleichung . . . . .	657
<b>12</b>	<b>Funktionalanalysis</b> . . . . .	<b>659</b>
12.1	Vektorräume . . . . .	659
12.1.1	Begriff des Vektorraumes . . . . .	659
12.1.2	Lineare und affin-lineare Teilmengen . . . . .	660
12.1.3	Linear unabhängige Elemente . . . . .	662
12.1.4	Konvexe Teilmengen und konvexe Hülle . . . . .	662
12.1.4.1	Konvexe Mengen . . . . .	662
12.1.4.2	Kegel . . . . .	663
12.1.5	Lineare Operatoren und Funktionale . . . . .	663
12.1.5.1	Abbildungen . . . . .	663
12.1.5.2	Homomorphismus und Endomorphismus . . . . .	664
12.1.5.3	Isomorphe Vektorräume . . . . .	664

12.1.6	Komplexifikation reeller Vektorräume . . . . .	664
12.1.7	Geordnete Vektorräume . . . . .	664
12.1.7.1	Kegel und Halbordnung . . . . .	664
12.1.7.2	Ordnungsbeschränkte Mengen . . . . .	665
12.1.7.3	Positive Operatoren . . . . .	666
12.1.7.4	Vektorverbände . . . . .	666
12.2	Metrische Räume . . . . .	667
12.2.1	Begriff des metrischen Raumes . . . . .	667
12.2.1.1	Kugeln, Umgebungen und offene Mengen . . . . .	669
12.2.1.2	Konvergenz von Folgen im metrischen Raum . . . . .	669
12.2.1.3	Abgeschlossene Mengen und Abschließung . . . . .	670
12.2.1.4	Dichte Teilmengen und separable metrische Räume . . . . .	670
12.2.2	Vollständige metrische Räume . . . . .	671
12.2.2.1	Cauchy-Folge . . . . .	671
12.2.2.2	Vollständiger metrischer Raum . . . . .	671
12.2.2.3	Einige fundamentale Sätze in vollständigen metrischen Räumen . . . . .	671
12.2.2.4	Einige Anwendungen des Kontraktionsprinzips . . . . .	672
12.2.2.5	Vervollständigung eines metrischen Raumes . . . . .	674
12.2.3	Stetige Operatoren . . . . .	674
12.3	Normierte Räume . . . . .	674
12.3.1	Begriff des normierten Raumes . . . . .	674
12.3.1.1	Axiome des normierten Raumes . . . . .	674
12.3.1.2	Einige Eigenschaften normierter Räume . . . . .	675
12.3.2	Banach-Räume . . . . .	675
12.3.2.1	Reihen in normierten Räumen . . . . .	675
12.3.2.2	Beispiele von Banach-Räumen . . . . .	676
12.3.2.3	Sobolew-Räume . . . . .	676
12.3.3	Geordnete normierte Räume . . . . .	677
12.3.4	Normierte Algebren . . . . .	677
12.4	Hilbert-Räume . . . . .	678
12.4.1	Begriff des Hilbert-Raumes . . . . .	678
12.4.1.1	Skalarprodukt . . . . .	678
12.4.1.2	Unitäre Räume und einige ihrer Eigenschaften . . . . .	678
12.4.1.3	Hilbert-Raum . . . . .	679
12.4.2	Orthogonalität . . . . .	679
12.4.2.1	Eigenschaften der Orthogonalität . . . . .	679
12.4.2.2	Orthogonale Systeme . . . . .	680
12.4.3	Fourier-Reihen im Hilbert-Raum . . . . .	681
12.4.3.1	Bestapproximation . . . . .	681
12.4.3.2	Parsevalsche Gleichung, Satz von Riesz-Fischer . . . . .	681
12.4.4	Existenz einer Basis. Isomorphe Hilbert-Räume . . . . .	682
12.5	Stetige lineare Operatoren und Funktionale . . . . .	682
12.5.1	Beschränktheit, Norm und Stetigkeit linearer Operatoren . . . . .	682
12.5.1.1	Beschränktheit und Norm linearer Operatoren . . . . .	682
12.5.1.2	Raum linearer stetiger Operatoren . . . . .	683
12.5.1.3	Konvergenz von Operatorenfolgen . . . . .	683
12.5.2	Lineare stetige Operatoren in Banach-Räumen . . . . .	683
12.5.3	Elemente der Spektraltheorie linearer Operatoren . . . . .	685
12.5.3.1	Resolventenmenge und Resolvente eines Operators . . . . .	685
12.5.3.2	Spektrum eines Operators . . . . .	686
12.5.4	Stetige lineare Funktionale . . . . .	686
12.5.4.1	Definition . . . . .	686

	12.5.4.2	Stetige lineare Funktionale im Hilbert-Raum, Satz von Riesz . . . . .	687
	12.5.4.3	Stetige lineare Funktionale in $L^p$ . . . . .	687
	12.5.5	Fortsetzung von linearen Funktionalen . . . . .	688
	12.5.6	Trennung konvexer Mengen . . . . .	688
	12.5.7	Bidualer Raum und reflexive Räume . . . . .	689
12.6		Adjungierte Operatoren in normierten Räumen . . . . .	689
	12.6.1	Adjungierter Operator zu einem beschränkten Operator . . . . .	689
	12.6.2	Adjungierter Operator zu einem unbeschränkten Operator . . . . .	690
	12.6.3	Selbstadjungierte Operatoren . . . . .	691
	12.6.3.1	Positiv definite Operatoren . . . . .	691
	12.6.3.2	Projektoren im Hilbert-Raum . . . . .	691
12.7		Kompakte Mengen und kompakte Operatoren . . . . .	691
	12.7.1	Kompakte Teilmengen in normierten Räumen . . . . .	691
	12.7.2	Kompakte Operatoren . . . . .	692
	12.7.2.1	Begriff des kompakten Operators . . . . .	692
	12.7.2.2	Eigenschaften linearer kompakter Operatoren . . . . .	692
	12.7.2.3	Schwache Konvergenz von Elementen . . . . .	692
	12.7.3	Fredholmsche Alternative . . . . .	693
	12.7.4	Kompakte Operatoren im Hilbert-Raum . . . . .	693
	12.7.5	Kompakte selbstadjungierte Operatoren . . . . .	693
12.8		Nichtlineare Operatoren . . . . .	694
	12.8.1	Beispiele nichtlinearer Operatoren . . . . .	694
	12.8.2	Differenzierbarkeit nichtlinearer Operatoren . . . . .	695
	12.8.3	Newton-Verfahren . . . . .	695
	12.8.4	Schaudersches Fixpunktprinzip . . . . .	696
	12.8.5	Leray-Schauder-Theorie . . . . .	697
	12.8.6	Positive nichtlineare Operatoren . . . . .	697
	12.8.7	Monotone Operatoren in Banach-Räumen . . . . .	698
12.9		Maß und Lebesgue-Integral . . . . .	698
	12.9.1	Sigma-Algebren und Maße . . . . .	698
	12.9.2	Meßbare Funktionen . . . . .	700
	12.9.2.1	Meßbare Funktion . . . . .	700
	12.9.2.2	Eigenschaften der Klasse der meßbaren Funktionen . . . . .	700
	12.9.3	Integration . . . . .	700
	12.9.3.1	Definition des Integrals . . . . .	700
	12.9.3.2	Einige Eigenschaften des Integrals . . . . .	701
	12.9.3.3	Konvergenzsätze . . . . .	701
	12.9.4	$L^p$ -Räume . . . . .	702
	12.9.5	Distributionen . . . . .	703
	12.9.5.1	Formel der partiellen Integration . . . . .	703
	12.9.5.2	Verallgemeinerte Ableitung . . . . .	703
	12.9.5.3	Distribution . . . . .	704
	12.9.5.4	Ableitung einer Distribution . . . . .	704
<b>13</b>		<b>Vektoranalysis und Feldtheorie</b> . . . . .	<b>706</b>
13.1		Grundbegriffe der Feldtheorie . . . . .	706
	13.1.1	Vektorfunktion einer skalaren Variablen . . . . .	706
	13.1.1.1	Definitionen . . . . .	706
	13.1.1.2	Ableitung einer Vektorfunktion . . . . .	706
	13.1.1.3	Differentiationsregeln für Vektoren . . . . .	706
	13.1.1.4	Taylor-Entwicklung für Vektorfunktionen . . . . .	707
	13.1.2	Skalarfelder . . . . .	707

13.1.2.1	Skalares Feld oder skalare Punktfunktion . . . . .	707
13.1.2.2	Wichtige Fälle skalarer Felder . . . . .	707
13.1.2.3	Koordinatendarstellung von Skalarfeldern . . . . .	708
13.1.2.4	Niveaulinien und Niveaulinien . . . . .	708
13.1.3	Vektorfelder . . . . .	708
13.1.3.1	Vektoriellcs Feld oder vektorielle Punktfunktion . . . . .	708
13.1.3.2	Wichtige Fälle vektorieller Felder . . . . .	709
13.1.3.3	Koordinatendarstellung von Vektorfeldern . . . . .	710
13.1.3.4	Übergang von einem Koordinatensystem zu einem anderen . . . . .	711
13.1.3.5	Feldlinien . . . . .	712
13.2	Räumliche Differentialoperationen . . . . .	713
13.2.1	Richtungs- und Volumenableitung . . . . .	713
13.2.1.1	Richtungsableitung eines skalaren Feldes . . . . .	713
13.2.1.2	Richtungsableitung eines vektoriellen Feldes . . . . .	713
13.2.1.3	Volumenableitung oder räumliche Ableitung . . . . .	714
13.2.2	Gradient eines Skalarfeldes . . . . .	714
13.2.2.1	Definition des Gradienten . . . . .	714
13.2.2.2	Gradient und Richtungsableitung . . . . .	715
13.2.2.3	Gradient und Volumenableitung . . . . .	715
13.2.2.4	Weitere Eigenschaften des Gradienten . . . . .	715
13.2.2.5	Gradient des Skalarfeldes in verschiedenen Koordinaten . . . . .	715
13.2.2.6	Rechenregeln . . . . .	716
13.2.3	Vektorgradient . . . . .	716
13.2.4	Divergenz des Vektorfeldes . . . . .	716
13.2.4.1	Definition der Divergenz . . . . .	716
13.2.4.2	Divergenz in verschiedenen Koordinaten . . . . .	717
13.2.4.3	Regeln zur Berechnung der Divergenz . . . . .	717
13.2.4.4	Divergenz eines Zentralfeldes . . . . .	717
13.2.5	Rotation des Vektorfeldes . . . . .	718
13.2.5.1	Definitionen der Rotation . . . . .	718
13.2.5.2	Rotation in verschiedenen Koordinaten . . . . .	719
13.2.5.3	Regeln zur Berechnung der Rotation . . . . .	719
13.2.5.4	Rotation des Potentialfeldes . . . . .	720
13.2.6	Nablaoperator, Laplace-Operator . . . . .	720
13.2.6.1	Nablaoperator . . . . .	720
13.2.6.2	Rechenregeln für den Nablaoperator . . . . .	720
13.2.6.3	Vektorgradient . . . . .	721
13.2.6.4	Zweifache Anwendung des Nablaoperators . . . . .	721
13.2.6.5	Laplace-Operator . . . . .	721
13.2.7	Übersicht zu den räumlichen Differentialoperationen . . . . .	722
13.2.7.1	Prinzipielle Verknüpfungen und Ergebnisse für Differentialoperatoren . . . . .	722
13.2.7.2	Rechenregeln für Differentialoperatoren . . . . .	722
13.2.7.3	Vektoranalytische Ausdrücke in kartesischen, Zylinder- und Kugelkoordinaten . . . . .	723
13.3	Integration in Vektorfeldern . . . . .	724
13.3.1	Kurvenintegral und Potential im Vektorfeld . . . . .	724
13.3.1.1	Kurvenintegral im Vektorfeld . . . . .	724
13.3.1.2	Bedeutung des Kurvenintegrals in der Mechanik . . . . .	725
13.3.1.3	Eigenschaften des Kurvenintegrals . . . . .	725
13.3.1.4	Kurvenintegral in kartesischen Koordinaten . . . . .	725
13.3.1.5	Umlaufintegral eines Vektorfeldes . . . . .	725

	13.3.1.6	Konservatives oder Potentialfeld . . . . .	726
13.3.2		Oberflächenintegrale . . . . .	727
	13.3.2.1	Vektor eines ebenen Flächenstückes . . . . .	727
	13.3.2.2	Berechnung von Oberflächenintegralen . . . . .	727
	13.3.2.3	Oberflächenintegrale und Fluß von Feldern . . . . .	728
	13.3.2.4	Oberflächenintegrale in kartesischen Koordinaten als Oberflächenintegrale 2. Art . . . . .	728
13.3.3		Integralsätze . . . . .	729
	13.3.3.1	Integralsatz und Integralformel von Gauß . . . . .	729
	13.3.3.2	Integralsatz von Stokes . . . . .	730
	13.3.3.3	Integralsätze von Green . . . . .	730
13.4		Berechnung von Feldern . . . . .	731
	13.4.1	Reines Quellenfeld . . . . .	731
	13.4.2	Reines Wirbelfeld oder quellenfreies Wirbelfeld . . . . .	732
	13.4.3	Vektorfelder mit punktförmigen Quellen . . . . .	732
	13.4.3.1	Coulomb-Feld der Punktladung . . . . .	732
	13.4.3.2	Gravitationsfeld der Punktmasse . . . . .	733
	13.4.4	Superposition von Feldern . . . . .	733
	13.4.4.1	Diskrete Quellenverteilung . . . . .	733
	13.4.4.2	Kontinuierliche Quellenverteilung . . . . .	733
	13.4.4.3	Zusammenfassung . . . . .	733
13.5		Differentialgleichungen der Feldtheorie . . . . .	734
	13.5.1	Laplacesche Differentialgleichung . . . . .	734
	13.5.2	Poissonsche Differentialgleichung . . . . .	734
<b>14</b>		<b>Funktionentheorie</b> . . . . .	<b>735</b>
14.1		Funktionen einer komplexen Veränderlichen . . . . .	735
	14.1.1	Stetigkeit, Differenzierbarkeit . . . . .	735
	14.1.1.1	Definition der komplexen Funktion . . . . .	735
	14.1.1.2	Grenzwert der komplexen Funktion . . . . .	735
	14.1.1.3	Stetigkeit der komplexen Funktion . . . . .	735
	14.1.1.4	Differenzierbarkeit der komplexen Funktion . . . . .	735
	14.1.2	Analytische Funktionen . . . . .	736
	14.1.2.1	Definition der analytischen Funktion . . . . .	736
	14.1.2.2	Beispiele analytischer Funktionen . . . . .	736
	14.1.2.3	Eigenschaften analytischer Funktionen . . . . .	736
	14.1.2.4	Singuläre Punkte . . . . .	737
	14.1.3	Konforme Abbildung . . . . .	738
	14.1.3.1	Begriff und Eigenschaften der konformen Abbildung . . . . .	738
	14.1.3.2	Einfachste konforme Abbildungen . . . . .	739
	14.1.3.3	Schwarzsches Spiegelungsprinzip . . . . .	745
	14.1.3.4	Komplexe Potentiale . . . . .	745
	14.1.3.5	Superpositionsprinzip . . . . .	747
	14.1.3.6	Beliebige Abbildung der komplexen Zahlenebene . . . . .	748
14.2		Integration im Komplexen . . . . .	749
	14.2.1	Bestimmtes und unbestimmtes Integral . . . . .	749
	14.2.1.1	Definition des Integrals im Komplexen . . . . .	749
	14.2.1.2	Eigenschaften und Berechnung komplexer Integrale . . . . .	750
	14.2.2	Integralsatz von Cauchy, Hauptsatz der Funktionentheorie . . . . .	752
	14.2.2.1	Integralsatz von Cauchy für einfach zusammenhängende Gebiete . . . . .	752
	14.2.2.2	Integralsatz von Cauchy für mehrfach zusammenhängende Gebiete . . . . .	752
	14.2.3	Integralformeln von Cauchy . . . . .	753

	14.2.3.1 Analytische Funktion innerhalb eines Gebietes . . . . .	753
	14.2.3.2 Analytische Funktion außerhalb eines Gebietes . . . . .	753
14.3	Potenzreihenentwicklung analytischer Funktionen . . . . .	753
	14.3.1 Konvergenz von Reihen mit komplexen Gliedern . . . . .	753
	14.3.1.1 Konvergenz einer Zahlenfolge mit komplexen Gliedern . . . . .	753
	14.3.1.2 Konvergenz einer unendlichen Reihe mit komplexen Gliedern . . . . .	754
	14.3.1.3 Potenzreihen im Komplexen . . . . .	754
	14.3.2 Taylor-Reihe . . . . .	755
	14.3.3 Prinzip der analytischen Fortsetzung . . . . .	756
	14.3.4 Laurent-Entwicklung . . . . .	756
	14.3.5 Isolierte singuläre Stellen und der Residuensatz . . . . .	757
	14.3.5.1 Isolierte singuläre Stellen . . . . .	757
	14.3.5.2 Meromorphe Funktionen . . . . .	757
	14.3.5.3 Elliptische Funktionen . . . . .	757
	14.3.5.4 Residuum . . . . .	758
	14.3.5.5 Residuensatz . . . . .	758
14.4	Berechnung reeller Integrale durch Integration im Komplexen . . . . .	759
	14.4.1 Anwendung der Cauchyschen Integralformeln . . . . .	759
	14.4.2 Anwendung des Residuensatzes . . . . .	759
	14.4.3 Anwendungen des Lemmas von Jordan . . . . .	759
	14.4.3.1 Lemma von Jordan . . . . .	759
	14.4.3.2 Beispiele zum Lemma von Jordan . . . . .	760
14.5	Algebraische und elementare transzendente Funktionen . . . . .	762
	14.5.1 Algebraische Funktionen . . . . .	762
	14.5.2 Elementare transzendente Funktionen . . . . .	762
	14.5.3 Beschreibung von Kurven in komplexer Form . . . . .	765
14.6	Elliptische Funktionen . . . . .	766
	14.6.1 Zusammenhang mit elliptischen Integralen . . . . .	766
	14.6.2 Jacobische Funktionen . . . . .	768
	14.6.3 Thetafunktionen . . . . .	769
	14.6.4 Weierstrasssche Funktionen . . . . .	770
<b>15</b>	<b>Integraltransformationen</b> . . . . .	<b>772</b>
15.1	Begriff der Integraltransformation . . . . .	772
	15.1.1 Allgemeine Definition der Integraltransformationen . . . . .	772
	15.1.2 Spezielle Integraltransformationen . . . . .	772
	15.1.3 Umkehrtransformationen . . . . .	772
	15.1.4 Linearität der Integraltransformationen . . . . .	774
	15.1.5 Integraltransformationen für Funktionen von mehreren Veränderlichen . . . . .	774
	15.1.6 Anwendungen der Integraltransformationen . . . . .	774
15.2	Laplace-Transformation . . . . .	775
	15.2.1 Eigenschaften der Laplace-Transformation . . . . .	775
	15.2.1.1 Laplace-Transformierte, Original- und Bildbereich . . . . .	775
	15.2.1.2 Rechenregeln zur Laplace-Transformation . . . . .	776
	15.2.1.3 Bildfunktionen spezieller Funktionen . . . . .	779
	15.2.1.4 Diracsche Delta-Funktion und Distributionen . . . . .	782
	15.2.2 Rücktransformation in den Originalbereich . . . . .	783
	15.2.2.1 Rücktransformation mit Hilfe von Tabellen . . . . .	783
	15.2.2.2 Partialbruchzerlegung . . . . .	783
	15.2.2.3 Reihenentwicklungen . . . . .	784
	15.2.2.4 Umkehrintegral . . . . .	785
	15.2.3 Lösung von Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation . . . . .	786

	15.2.3.1	Gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	786
	15.2.3.2	Gewöhnliche Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten	787
	15.2.3.3	Partielle Differentialgleichungen	788
15.3		Fourier-Transformation	789
	15.3.1	Eigenschaften der Fourier-Transformation	789
	15.3.1.1	Fourier-Integral	789
	15.3.1.2	Fourier-Transformation und Umkehrtransformation	790
	15.3.1.3	Rechenregeln zur Fourier-Transformation	792
	15.3.1.4	Bildfunktionen spezieller Funktionen	795
	15.3.2	Lösung von Differentialgleichungen mit Hilfe der Fourier-Transformation	796
	15.3.2.1	Gewöhnliche lineare Differentialgleichungen	796
	15.3.2.2	Partielle Differentialgleichungen	797
15.4		Z-Transformation	799
	15.4.1	Eigenschaften der Z-Transformation	799
	15.4.1.1	Diskrete Funktionen	799
	15.4.1.2	Definition der Z-Transformation	799
	15.4.1.3	Rechenregeln	800
	15.4.1.4	Zusammenhang mit der Laplace-Transformation	801
	15.4.1.5	Umkehrung der Z-Transformation	802
	15.4.2	Anwendungen der Z-Transformation	803
	15.4.2.1	Allgemeine Lösung linearer Differenzgleichungen	803
	15.4.2.2	Differenzgleichung 2. Ordnung (Anfangswertaufgabe)	804
	15.4.2.3	Differenzgleichung 2. Ordnung (Randwertaufgabe)	805
15.5		Wavelet-Transformation	805
	15.5.1	Signale	805
	15.5.2	Wavelets	806
	15.5.3	Wavelet-Transformation	807
	15.5.4	Diskrete Wavelet-Transformation	808
	15.5.4.1	Schnelle Wavelet-Transformation	808
	15.5.4.2	Diskrete Haar-Wavelet-Transformation	808
	15.5.5	Gabor-Transformation	808
15.6		Walsh-Funktionen	809
	15.6.1	Treppenfunktionen	809
	15.6.2	Walsh-Systeme	809
<b>16</b>		<b>Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik</b>	<b>810</b>
16.1		Kombinatorik	810
	16.1.1	Permutationen	810
	16.1.2	Kombinationen	810
	16.1.3	Variationen	811
	16.1.4	Zusammenstellung der Formeln der Kombinatorik	812
16.2		Wahrscheinlichkeitsrechnung	812
	16.2.1	Ereignisse, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten	812
	16.2.1.1	Ereignisse	812
	16.2.1.2	Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten	813
	16.2.1.3	Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Satz von Bayes	815
	16.2.2	Zufallsgrößen, Verteilungsfunktion	816
	16.2.2.1	Zufallsveränderliche	816
	16.2.2.2	Verteilungsfunktion	816
	16.2.2.3	Erwartungswert und Streuung, Tschebyscheffsche Ungleichung	818
	16.2.2.4	Mehrdimensionale Zufallsveränderliche	819

16.2.3	Diskrete Verteilungen . . . . .	819
16.2.3.1	Binomialverteilung . . . . .	820
16.2.3.2	Hypergeometrische Verteilung . . . . .	821
16.2.3.3	Poisson-Verteilung . . . . .	822
16.2.4	Stetige Verteilungen . . . . .	822
16.2.4.1	Normalverteilung . . . . .	822
16.2.4.2	Normierte Normalverteilung, Gaußsches Fehlerintegral . . . . .	824
16.2.4.3	Logarithmische Normalverteilung . . . . .	824
16.2.4.4	Exponentialverteilung . . . . .	825
16.2.4.5	Weibull-Verteilung . . . . .	826
16.2.4.6	$\chi^2$ -Verteilung . . . . .	827
16.2.4.7	Fisher-Verteilung . . . . .	827
16.2.4.8	Student-Verteilung . . . . .	828
16.2.5	Gesetze der großen Zahlen, Grenzwertsätze . . . . .	829
16.2.5.1	Gesetz der großen Zahlen von Bernoulli . . . . .	829
16.2.5.2	Grenzwertsatz von Lindeberg-Levy . . . . .	830
16.2.6	Stochastische Prozesse und stochastische Ketten . . . . .	830
16.2.6.1	Grundbegriffe, Markoffsche Ketten . . . . .	830
16.2.6.2	Poisson-Prozesse . . . . .	833
16.3	Mathematische Statistik . . . . .	835
16.3.1	Stichprobenfunktionen . . . . .	835
16.3.1.1	Grundgesamtheit, Stichproben, Zufallsvektor . . . . .	835
16.3.1.2	Stichprobenfunktionen . . . . .	836
16.3.2	Beschreibende Statistik . . . . .	837
16.3.2.1	Statistische Erfassung gegebener Meßwerte . . . . .	837
16.3.2.2	Statistische Parameter . . . . .	838
16.3.3	Wichtige Prüfverfahren . . . . .	839
16.3.3.1	Prüfen auf Normalverteilung . . . . .	839
16.3.3.2	Verteilung der Stichprobenmittelwerte . . . . .	841
16.3.3.3	Vertrauensgrenzen für den Mittelwert . . . . .	842
16.3.3.4	Vertrauensgrenzen für die Streuung . . . . .	843
16.3.3.5	Prinzip der Prüfverfahren . . . . .	844
16.3.4	Korrelation und Regression . . . . .	844
16.3.4.1	Lineare Korrelation bei zwei meßbaren Merkmalen . . . . .	844
16.3.4.2	Lineare Regression bei zwei meßbaren Merkmalen . . . . .	845
16.3.4.3	Mehrdimensionale Regression . . . . .	846
16.3.5	Monte-Carlo-Methode . . . . .	848
16.3.5.1	Simulation . . . . .	848
16.3.5.2	Zufallszahlen . . . . .	848
16.3.5.3	Beispiel für eine Monte-Carlo-Simulation . . . . .	850
16.3.5.4	Anwendungen der Monte-Carlo-Methode in der numerischen Mathematik . . . . .	850
16.3.5.5	Weitere Anwendungen der Monte-Carlo-Methode . . . . .	852
16.4	Theorie der Meßfehler . . . . .	853
16.4.1	Meßfehler und ihre Verteilung . . . . .	853
16.4.1.1	Meßfehlerreiteilung nach qualitativen Merkmalen . . . . .	853
16.4.1.2	Meßfehlerverteilungsdichte . . . . .	853
16.4.1.3	Meßfehlerreiteilung nach quantitativen Merkmalen . . . . .	855
16.4.1.4	Angabe von Meßergebnissen mit Fehlergrenzen . . . . .	858
16.4.1.5	Fehlerrechnung für direkte Messungen gleicher Genauigkeit . . . . .	858
16.4.1.6	Fehlerrechnung für direkte Messungen ungleicher Genauigkeit . . . . .	859
16.4.2	Fehlerfortpflanzung und Fehleranalyse . . . . .	860

	16.4.2.1	Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz . . . . .	860
	16.4.2.2	Fehleranalyse . . . . .	861
<b>17</b>		<b>Dynamische Systeme und Chaos</b>	<b>862</b>
17.1		Gewöhnliche Differentialgleichungen und Abbildungen . . . . .	862
17.1.1		Dynamische Systeme . . . . .	862
	17.1.1.1	Grundbegriffe . . . . .	862
	17.1.1.2	Invariante Mengen . . . . .	864
17.1.2		Qualitative Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen . . . . .	865
	17.1.2.1	Existenz des Flusses und Phasenraumstruktur . . . . .	865
	17.1.2.2	Lineare Differentialgleichungen . . . . .	866
	17.1.2.3	Stabilitätstheorie . . . . .	868
	17.1.2.4	Invariante Mannigfaltigkeiten . . . . .	871
	17.1.2.5	Poincaré–Abbildung . . . . .	875
	17.1.2.6	Topologische Äquivalenz von Differentialgleichungen . . . . .	875
17.1.3		Zeitdiskrete dynamische Systeme . . . . .	877
	17.1.3.1	Ruhelagen, periodische Orbits und Grenzmengen . . . . .	877
	17.1.3.2	Invariante Mannigfaltigkeiten . . . . .	877
	17.1.3.3	Topologische Konjugiertheit von zeitdiskreten Systemen . . . . .	878
17.1.4		Strukturelle Stabilität (Robustheit) . . . . .	878
	17.1.4.1	Strukturstabile Differentialgleichungen . . . . .	878
	17.1.4.2	Strukturstabile zeitdiskrete Systeme . . . . .	879
	17.1.4.3	Generische Eigenschaften . . . . .	880
17.2		Quantitative Beschreibung von Attraktoren . . . . .	881
17.2.1		Wahrscheinlichkeitsmaße auf Attraktoren . . . . .	881
	17.2.1.1	Invariantes Maß . . . . .	881
	17.2.1.2	Elemente der Ergodentheorie . . . . .	882
17.2.2		Entropien . . . . .	884
	17.2.2.1	Topologische Entropie . . . . .	884
	17.2.2.2	Metrische Entropie . . . . .	884
17.2.3		Lyapunov–Exponenten . . . . .	885
17.2.4		Dimensionen . . . . .	886
	17.2.4.1	Metrische Dimensionen . . . . .	886
	17.2.4.2	Auf invariante Maße zurückgehende Dimensionen . . . . .	889
	17.2.4.3	Lokale Hausdorff–Dimension nach Douady–Oesterlé . . . . .	891
	17.2.4.4	Beispiele von Attraktoren . . . . .	891
17.2.5		Seltsame Attraktoren und Chaos . . . . .	893
17.2.6		Chaos in eindimensionalen Abbildungen . . . . .	893
17.2.7		Rekonstruktion der Dynamik aus Zeitreihen . . . . .	894
	17.2.7.1	Grundlagen, Rekonstruktionen mit generischen Eigenschaften . . . . .	894
	17.2.7.2	Rekonstruktionen mit prävalenten Eigenschaften . . . . .	895
17.3		Bifurkationstheorie und Wege zum Chaos . . . . .	896
17.3.1		Bifurkationen in Morse–Smale–Systemen . . . . .	896
	17.3.1.1	Lokale Bifurkationen nahe Ruhelagen . . . . .	897
	17.3.1.2	Lokale Bifurkationen nahe einem periodischen Orbit . . . . .	902
	17.3.1.3	Globale Bifurkationen . . . . .	905
17.3.2		Übergänge zum Chaos . . . . .	906
	17.3.2.1	Kaskade von Periodenverdopplungen . . . . .	906
	17.3.2.2	Intermittenz . . . . .	906
	17.3.2.3	Globale homokline Bifurkationen . . . . .	907
	17.3.2.4	Auflösung eines Torus . . . . .	908

<b>8 Optimierung</b>	<b>913</b>
18.1 Lineare Optimierung	913
18.1.1 Problemstellung und geometrische Darstellung	913
18.1.1.1 Formen der linearen Optimierung	913
18.1.1.2 Beispiele und graphische Lösungen	914
18.1.2 Grundbegriffe der linearen Optimierung, Normalform	915
18.1.2.1 Ecke und Basis	915
18.1.2.2 Normalform der linearen Optimierungsaufgabe	917
18.1.3 Simplexverfahren	918
18.1.3.1 Simplextableau	918
18.1.3.2 Übergang zum neuen Simplextableau	918
18.1.3.3 Bestimmung eines ersten Simplextableaus	920
18.1.3.4 Revidiertes Simplexverfahren	921
18.1.3.5 Dualität in der linearen Optimierung	922
18.1.4 Spezielle lineare Optimierungsprobleme	924
18.1.4.1 Transportproblem	924
18.1.4.2 Zuordnungsproblem	926
18.1.4.3 Verteilungsproblem	927
18.1.4.4 Rundreiseproblem	927
18.1.4.5 Reihenfolgeproblem	927
18.2 Nichtlineare Optimierung	928
18.2.1 Problemstellung und theoretische Grundlagen	928
18.2.1.1 Problemstellung	928
18.2.1.2 Optimalitätsbedingungen	928
18.2.1.3 Dualität in der Optimierung	929
18.2.2 Spezielle nichtlineare Optimierungsaufgaben	930
18.2.2.1 Konvexe Optimierung	930
18.2.2.2 Quadratische Optimierung	930
18.2.3 Lösungsverfahren für quadratische Optimierungsaufgaben	931
18.2.3.1 Verfahren von Wolfe	931
18.2.3.2 Verfahren von Hildreth–d'Esopo	933
18.2.4 Numerische Suchverfahren	933
18.2.4.1 Eindimensionale Suche	934
18.2.4.2 Minimumsuche im $n$ -dimensionalen euklidischen Vektorraum	934
18.2.5 Verfahren für unrestringierte Aufgaben	935
18.2.5.1 Verfahren des steilsten Abstieges (Gradientenverfahren)	935
18.2.5.2 Anwendung des Newton–Verfahrens	935
18.2.5.3 Verfahren der konjugierten Gradienten	936
18.2.5.4 Verfahren von Davidon, Fletcher und Powell (DFP)	936
18.2.6 Evolutionsstrategien	937
18.2.6.1 Evolutionsprinzipien	937
18.2.6.2 Evolutionsalgorithmus	938
18.2.6.3 Klassifizierung	938
18.2.6.4 Erzeugung von Zufallszahlen	938
18.2.6.5 Einsatzgebiete der Evolutionsstrategien	938
18.2.6.6 $(1 + 1)$ -Mutations-Selektions-Strategie	939
18.2.6.7 Populationsstrategien	939
18.2.7 Gradientenverfahren für Probleme mit Ungleichungsrestriktionen	941
18.2.7.1 Aufgabenstellung und Voraussetzungen	941
18.2.7.2 Verfahren der zulässigen Richtungen	941
18.2.7.3 Verfahren der projizierten Gradienten	943
18.2.8 Straf- und Barriereverfahren	945

	18.2.8.1	Strafverfahren . . . . .	945
	18.2.8.2	Barriereverfahren . . . . .	946
	18.2.9	Schnittebenenverfahren . . . . .	947
18.3		Diskrete dynamische Optimierung . . . . .	948
	18.3.1	Diskrete dynamische Entscheidungsmodelle . . . . .	948
	18.3.1.1	$n$ -stufige Entscheidungsprozesse . . . . .	948
	18.3.1.2	Dynamische Optimierungsprobleme . . . . .	948
	18.3.2	Beispiele diskreter Entscheidungsmodelle . . . . .	949
	18.3.2.1	Einkaufsproblem . . . . .	949
	18.3.2.2	Rucksackproblem . . . . .	949
	18.3.3	Bellmansche Funktionalgleichungen . . . . .	949
	18.3.3.1	Eigenschaften der Kostenfunktion . . . . .	949
	18.3.3.2	Formulierung der Funktionalgleichungen . . . . .	950
	18.3.4	Bellmansches Optimalitätsprinzip . . . . .	951
	18.3.5	Bellmansche Funktionalgleichungsmethode . . . . .	951
	18.3.5.1	Bestimmung der minimalen Kosten . . . . .	951
	18.3.5.2	Bestimmung der optimalen Politik . . . . .	951
	18.3.6	Beispiele zur Anwendung der Funktionalgleichungsmethode . . . . .	952
	18.3.6.1	Optimale Einkaufspolitik . . . . .	952
	18.3.6.2	Rucksackproblem . . . . .	953
<b>19</b>		<b>Numerische Mathematik</b> . . . . .	<b>954</b>
19.1		Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungen mit einer Unbekannten . . . . .	954
	19.1.1	Iterationsverfahren . . . . .	954
	19.1.1.1	Gewöhnliches Iterationsverfahren . . . . .	954
	19.1.1.2	Newton-Verfahren . . . . .	955
	19.1.1.3	Regula falsi . . . . .	956
	19.1.2	Lösung von Polynomgleichungen . . . . .	957
	19.1.2.1	Horner-Schema . . . . .	957
	19.1.2.2	Lage der Nullstellen . . . . .	958
	19.1.2.3	Numerische Verfahren . . . . .	959
19.2		Numerische Lösung von Gleichungssystemen . . . . .	960
	19.2.1	Lineare Gleichungssysteme . . . . .	960
	19.2.1.1	Dreieckszerlegung einer Matrix . . . . .	961
	19.2.1.2	Cholesky-Verfahren bei symmetrischer Koeffizientenmatrix . . . . .	963
	19.2.1.3	Orthogonalisierungsverfahren . . . . .	963
	19.2.1.4	Iteration in Gesamt- und Einzelschritten . . . . .	965
	19.2.2	Nichtlineare Gleichungssysteme . . . . .	966
	19.2.2.1	Gewöhnliches Iterationsverfahren . . . . .	966
	19.2.2.2	Newton-Verfahren . . . . .	967
	19.2.2.3	Ableitungsfreies Gauß-Newton-Verfahren . . . . .	967
19.3		Numerische Integration . . . . .	968
	19.3.1	Allgemeine Quadraturformel . . . . .	968
	19.3.2	Interpolationsquadraturen . . . . .	969
	19.3.2.1	Rechteckformel . . . . .	969
	19.3.2.2	Trapezformel . . . . .	969
	19.3.2.3	Hermitesche Trapezformel . . . . .	970
	19.3.2.4	Simpson-Formel . . . . .	970
	19.3.3	Quadraturformeln vom Gauß-Typ . . . . .	970
	19.3.3.1	Gaußsche Quadraturformeln . . . . .	971
	19.3.3.2	Lobattosche Quadraturformeln . . . . .	971
	19.3.4	Verfahren von Romberg . . . . .	971

	19.3.4.1	Algorithmus des Romberg-Verfahrens	972
	19.3.4.2	Extrapolationsprinzip	972
19.4		Genäherte Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen	974
	19.4.1	Anfangswertaufgaben	974
	19.4.1.1	Eulersches Polygonzugverfahren	974
	19.4.1.2	Runge-Kutta-Verfahren	975
	19.4.1.3	Mehrschrittverfahren	976
	19.4.1.4	Prediktor-Korrektor-Verfahren	976
	19.4.1.5	Konvergenz, Konsistenz, Stabilität	977
	19.4.2	Randwertaufgaben	978
	19.4.2.1	Differenzenverfahren	978
	19.4.2.2	Ansatzverfahren	979
	19.4.2.3	Schiebverfahren	980
19.5		Genäherte Integration von partiellen Differentialgleichungen	982
	19.5.1	Differenzenverfahren	982
	19.5.2	Ansatzverfahren	983
	19.5.3	Methode der finiten Elemente (FEM)	984
19.6		Approximation, Ausgleichsrechnung, Harmonische Analyse	989
	19.6.1	Polynominterpolation	989
	19.6.1.1	Newtonsche Interpolationsformel	989
	19.6.1.2	Interpolationsformel nach Lagrange	989
	19.6.1.3	Interpolation nach Aitken-Neville	990
	19.6.2	Approximation im Mittel	991
	19.6.2.1	Stetige Aufgabe, Normalgleichungen	991
	19.6.2.2	Diskrete Aufgabe, Normalgleichungen, Householder-Verfahren	992
	19.6.2.3	Mehrdimensionale Aufgaben	993
	19.6.2.4	Nichtlineare Quadratmittelaufgaben	994
	19.6.3	Tschebyscheff-Approximation	995
	19.6.3.1	Aufgabenstellung und Alternantensatz	995
	19.6.3.2	Eigenschaften der Tschebyscheff-Polynome	995
	19.6.3.3	Remes-Algorithmus	997
	19.6.3.4	Diskrete Tschebyscheff-Approximation und Optimierung	997
	19.6.4	Harmonische Analyse	998
	19.6.4.1	Formeln zur trigonometrischen Interpolation	998
	19.6.4.2	Schnelle Fourier-Transformation (FFT)	999
19.7		Darstellung von Kurven und Flächen mit Hilfe von Splines	1003
	19.7.1	Kubische Splines	1003
	19.7.1.1	Interpolationssplines	1003
	19.7.1.2	Ausgleichssplines	1004
	19.7.2	Bikubische Splines	1005
	19.7.2.1	Anwendung bikubischer Splines	1005
	19.7.2.2	Bikubische Interpolationssplines	1005
	19.7.2.3	Bikubische Ausgleichssplines	1006
	19.7.3	Bernstein-Bézier-Darstellung von Kurven und Flächen	1006
	19.7.3.1	Prinzip der B-B-Kurvendarstellung	1007
	19.7.3.2	B-B-Flächendarstellung	1008
19.8		Nutzung von Computern	1009
	19.8.1	Interne Zeichendarstellung	1009
	19.8.1.1	Zahlensysteme	1009
	19.8.1.2	Interne Zahlendarstellung	1010
	19.8.2	Numerische Probleme beim Rechnen auf Computern	1011
	19.8.2.1	Einführung, Fehlerarten	1011

	19.8.2.2	Normalisierte Dezimalzahlen und Rundung . . . . .	1012
	19.8.2.3	Genauigkeitsfragen beim numerischen Rechnen . . . . .	1013
19.8.3		Bibliotheken numerischer Verfahren . . . . .	1017
	19.8.3.1	NAG-Bibliothek . . . . .	1017
	19.8.3.2	IMSL-Bibliothek . . . . .	1018
	19.8.3.3	Aachener Bibliothek . . . . .	1019
19.8.4		Anwendung von interaktiven Programmsystemen und Computeralgebrasystemen . . . . .	1019
	19.8.4.1	Matlab . . . . .	1019
	19.8.4.2	Mathematica . . . . .	1024
	19.8.4.3	Maple . . . . .	1028
<b>20</b>		<b>Computeralgebrasysteme – Beispiel Mathematica</b>	<b>1031</b>
20.1		Einführung . . . . .	1031
	20.1.1	Kurzcharakteristik von Computeralgebrasystemen . . . . .	1031
	20.1.2	Zwei einführende Beispiele für die Hauptanwendungsgebiete . . . . .	1032
	20.1.2.1	Formelmanipulation . . . . .	1032
	20.1.2.2	Numerische Berechnungen . . . . .	1032
20.2		Wichtige Strukturelemente von Mathematica . . . . .	1032
	20.2.1	Hauptstrukturelemente . . . . .	1032
	20.2.2	Zahlenarten in Mathematica . . . . .	1033
	20.2.2.1	Grundtypen von Zahlen in Mathematica . . . . .	1033
	20.2.2.2	Spezielle Zahlen . . . . .	1034
	20.2.2.3	Darstellung und Konvertierung von Zahlen . . . . .	1034
	20.2.3	Wichtige Operatoren . . . . .	1035
	20.2.4	Listen . . . . .	1036
	20.2.4.1	Begriff und Bedeutung . . . . .	1036
	20.2.4.2	Verschachtelte Listen . . . . .	1036
	20.2.4.3	Operationen mit Listen . . . . .	1037
	20.2.4.4	Spezielle Listen . . . . .	1037
	20.2.5	Vektoren und Matrizen als Listen . . . . .	1038
	20.2.5.1	Aufstellung geeigneter Listen . . . . .	1038
	20.2.5.2	Operationen mit Matrizen und Vektoren . . . . .	1038
	20.2.6	Funktionen . . . . .	1039
	20.2.6.1	Standardfunktionen . . . . .	1039
	20.2.6.2	Spezielle Funktionen . . . . .	1040
	20.2.6.3	Reine Funktionen . . . . .	1040
	20.2.7	Muster . . . . .	1040
	20.2.8	Funktionaloperationen . . . . .	1041
	20.2.9	Programmierung . . . . .	1042
	20.2.10	Ergänzungen zur Syntax, Informationen, Meldungen . . . . .	1043
	20.2.10.1	Kontexte, Attribute . . . . .	1043
	20.2.10.2	Informationen . . . . .	1044
	20.2.10.3	Meldungen . . . . .	1044
20.3		Wichtige Anwendungsgebiete von Mathematica . . . . .	1044
	20.3.1	Manipulation algebraischer Ausdrücke . . . . .	1044
	20.3.1.1	Multiplikation von Ausdrücken . . . . .	1045
	20.3.1.2	Faktorzerlegung von Polynomen . . . . .	1045
	20.3.1.3	Operationen auf Polynomen . . . . .	1046
	20.3.1.4	Partialbruchzerlegung . . . . .	1046
	20.3.1.5	Manipulation nichtpolynomialer Ausdrücke . . . . .	1046

19.3.4.1	Algorithmus des Romberg-Verfahrens	972
19.3.4.2	Extrapolationsprinzip	972
19.4	Genäherte Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen	974
19.4.1	Anfangswertaufgaben	974
19.4.1.1	Eulersches Polygonzugverfahren	974
19.4.1.2	Runge-Kutta-Verfahren	975
19.4.1.3	Mehrschrittverfahren	976
19.4.1.4	Prediktor-Korrektor-Verfahren	976
19.4.1.5	Konvergenz, Konsistenz, Stabilität	977
19.4.2	Randwertaufgaben	978
19.4.2.1	Differenzenverfahren	978
19.4.2.2	Ansatzverfahren	979
19.4.2.3	Schießverfahren	980
19.5	Genäherte Integration von partiellen Differentialgleichungen	982
19.5.1	Differenzenverfahren	982
19.5.2	Ansatzverfahren	983
19.5.3	Methode der finiten Elemente (FEM)	984
19.6	Approximation, Ausgleichsrechnung, Harmonische Analyse	989
19.6.1	Polynominterpolation	989
19.6.1.1	Newtonsche Interpolationsformel	989
19.6.1.2	Interpolationsformel nach Lagrange	989
19.6.1.3	Interpolation nach Aitken-Neville	990
19.6.2	Approximation im Mittel	991
19.6.2.1	Stetige Aufgabe, Normalgleichungen	991
19.6.2.2	Diskrete Aufgabe, Normalgleichungen, Householder-Verfahren	992
19.6.2.3	Mehrdimensionale Aufgaben	993
19.6.2.4	Nichtlineare Quadratmittelaufgaben	994
19.6.3	Tschebyscheff-Approximation	995
19.6.3.1	Aufgabenstellung und Alternantensatz	995
19.6.3.2	Eigenschaften der Tschebyscheff-Polynome	995
19.6.3.3	Remes-Algorithmus	997
19.6.3.4	Diskrete Tschebyscheff-Approximation und Optimierung	997
19.6.4	Harmonische Analyse	998
19.6.4.1	Formeln zur trigonometrischen Interpolation	998
19.6.4.2	Schnelle Fourier-Transformation (FFT)	999
19.7	Darstellung von Kurven und Flächen mit Hilfe von Splines	1003
19.7.1	Kubische Splines	1003
19.7.1.1	Interpolationssplines	1003
19.7.1.2	Ausgleichssplines	1004
19.7.2	Bikubische Splines	1005
19.7.2.1	Anwendung bikubischer Splines	1005
19.7.2.2	Bikubische Interpolationssplines	1005
19.7.2.3	Bikubische Ausgleichssplines	1006
19.7.3	Bernstein-Bézier-Darstellung von Kurven und Flächen	1006
19.7.3.1	Prinzip der B-B-Kurvendarstellung	1007
19.7.3.2	B-B-Flächendarstellung	1008
19.8	Nutzung von Computern	1009
19.8.1	Interne Zeichendarstellung	1009
19.8.1.1	Zahlensysteme	1009
19.8.1.2	Interne Zahlendarstellung	1010
19.8.2	Numerische Probleme beim Rechnen auf Computern	1011
19.8.2.1	Einführung, Fehlerarten	1011

	19.8.2.2	Normalisierte Dezimalzahlen und Rundung . . . . .	1012
	19.8.2.3	Genauigkeitsfragen beim numerischen Rechnen . . . . .	1013
19.8.3		Bibliotheken numerischer Verfahren . . . . .	1017
	19.8.3.1	NAG-Bibliothek . . . . .	1017
	19.8.3.2	IMSL-Bibliothek . . . . .	1018
	19.8.3.3	Aachener Bibliothek . . . . .	1019
19.8.4		Anwendung von interaktiven Programmsystemen und Computeralgebrasystemen . . . . .	1019
	19.8.4.1	Matlab . . . . .	1019
	19.8.4.2	Mathematica . . . . .	1024
	19.8.4.3	Maple . . . . .	1028
<b>20</b>		<b>Computeralgebrasysteme – Beispiel Mathematica</b>	<b>1031</b>
20.1		Einführung . . . . .	1031
	20.1.1	Kurzcharakteristik von Computeralgebrasystemen . . . . .	1031
	20.1.2	Zwei einführende Beispiele für die Hauptanwendungsgebiete . . . . .	1032
	20.1.2.1	Formelmanipulation . . . . .	1032
	20.1.2.2	Numerische Berechnungen . . . . .	1032
20.2		Wichtige Strukturelemente von Mathematica . . . . .	1032
	20.2.1	Hauptstrukturelemente . . . . .	1032
	20.2.2	Zahlenarten in Mathematica . . . . .	1033
	20.2.2.1	Grundtypen von Zahlen in Mathematica . . . . .	1033
	20.2.2.2	Spezielle Zahlen . . . . .	1034
	20.2.2.3	Darstellung und Konvertierung von Zahlen . . . . .	1034
	20.2.3	Wichtige Operatoren . . . . .	1035
	20.2.4	Listen . . . . .	1036
	20.2.4.1	Begriff und Bedeutung . . . . .	1036
	20.2.4.2	Verschachtelte Listen . . . . .	1036
	20.2.4.3	Operationen mit Listen . . . . .	1037
	20.2.4.4	Spezielle Listen . . . . .	1037
	20.2.5	Vektoren und Matrizen als Listen . . . . .	1038
	20.2.5.1	Aufstellung geeigneter Listen . . . . .	1038
	20.2.5.2	Operationen mit Matrizen und Vektoren . . . . .	1038
	20.2.6	Funktionen . . . . .	1039
	20.2.6.1	Standardfunktionen . . . . .	1039
	20.2.6.2	Spezielle Funktionen . . . . .	1040
	20.2.6.3	Reine Funktionen . . . . .	1040
	20.2.7	Muster . . . . .	1040
	20.2.8	Funktionaloperationen . . . . .	1041
	20.2.9	Programmierung . . . . .	1042
	20.2.10	Ergänzungen zur Syntax, Informationen, Meldungen . . . . .	1043
	20.2.10.1	Kontexte, Attribute . . . . .	1043
	20.2.10.2	Informationen . . . . .	1044
	20.2.10.3	Meldungen . . . . .	1044
20.3		Wichtige Anwendungsgebiete von Mathematica . . . . .	1044
	20.3.1	Manipulation algebraischer Ausdrücke . . . . .	1044
	20.3.1.1	Multiplikation von Ausdrücken . . . . .	1045
	20.3.1.2	Faktorzerlegung von Polynomen . . . . .	1045
	20.3.1.3	Operationen auf Polynomen . . . . .	1046
	20.3.1.4	Partialbruchzerlegung . . . . .	1046
	20.3.1.5	Manipulation nichtpolynomialer Ausdrücke . . . . .	1046

20.3.2	Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen . . . . .	1047
20.3.2.1	Gleichungen als logische Ausdrücke . . . . .	1047
20.3.2.2	Lösung von Gleichungen . . . . .	1047
20.3.2.3	Lösung transzendenter Gleichungen . . . . .	1048
20.3.2.4	Lösung von Gleichungssystemen . . . . .	1048
20.3.3	Lineare Gleichungssysteme und Eigenwertaufgaben . . . . .	1049
20.3.4	Differential- und Integralrechnung . . . . .	1051
20.3.4.1	Berechnung von Differentialquotienten . . . . .	1051
20.3.4.2	Unbestimmte Integrale . . . . .	1052
20.3.4.3	Bestimmte Integrale, Mehrfachintegrale . . . . .	1053
20.3.4.4	Lösung von Differentialgleichungen . . . . .	1053
20.4	Graphik mit Mathematika . . . . .	1054
20.4.1	Grundlagen des Graphikaufbaus . . . . .	1054
20.4.2	Graphik-Primitive . . . . .	1055
20.4.3	Graphikoptionen . . . . .	1056
20.4.4	Syntax der Graphikdarstellung . . . . .	1056
20.4.4.1	Aufbau von Graphikobjekten . . . . .	1056
20.4.4.2	Graphische Darstellung von Funktionen . . . . .	1056
20.4.5	Zweidimensionale Kurven . . . . .	1058
20.4.5.1	Exponentialfunktionen . . . . .	1058
20.4.5.2	Funktion $y = x + \operatorname{Arcoth} x$ . . . . .	1058
20.4.5.3	Bessel-Funktionen . . . . .	1059
20.4.6	Parameterdarstellung von Kurven . . . . .	1059
20.4.7	Darstellung von Flächen und Raumkurven . . . . .	1059
20.4.7.1	Graphische Darstellung von Oberflächen . . . . .	1060
20.4.7.2	Optionen für 3D-Graphik . . . . .	1060
20.4.7.3	Dreidimensionale Objekte in Parameterdarstellung . . . . .	1061
<b>21</b>	<b>Tabellen</b> . . . . .	<b>1062</b>
21.1	Häufig gebrauchte Konstanten . . . . .	1062
21.2	Fundamentale physikalische Konstanten . . . . .	1062
21.3	Dezimalvorsätze . . . . .	1064
21.4	Physikalische Einheiten im SI-System . . . . .	1064
21.5	Wichtige Reihenentwicklungen . . . . .	1066
21.6	Fourier-Entwicklungen . . . . .	1071
21.7	Unbestimmte Integrale . . . . .	1074
21.7.1	Integrale rationaler Funktionen . . . . .	1074
21.7.1.1	Integrale mit $X = ax + b$ . . . . .	1074
21.7.1.2	Integrale mit $X = ax^2 + bx + c$ . . . . .	1076
21.7.1.3	Integrale mit $X = a^2 \pm x^2$ . . . . .	1077
21.7.1.4	Integrale mit $X = a^3 \pm x^3$ . . . . .	1079
21.7.1.5	Integrale mit $X = a^4 + x^4$ . . . . .	1080
21.7.1.6	Integrale mit $X = a^4 - x^4$ . . . . .	1080
21.7.1.7	Einige Fälle der Partialbruchzerlegung . . . . .	1080
21.7.2	Integrale irrationaler Funktionen . . . . .	1081
21.7.2.1	Integrale mit $\sqrt{x}$ und $a^2 \pm b^2x$ . . . . .	1081
21.7.2.2	Andere Integrale mit $\sqrt{x}$ . . . . .	1081
21.7.2.3	Integrale mit $\sqrt{ax + b}$ . . . . .	1081
21.7.2.4	Integrale mit $\sqrt{ax + b}$ und $\sqrt{fx + g}$ . . . . .	1083
21.7.2.5	Integrale mit $\sqrt{a^2 - x^2}$ . . . . .	1084
21.7.2.6	Integrale mit $\sqrt{x^2 + a^2}$ . . . . .	1085

21.7.2.7	Integrale mit $\sqrt{x^2 - a^2}$ . . . . .	1087
21.7.2.8	Integrale mit $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ . . . . .	1089
21.7.2.9	Integrale mit anderen irrationalen Ausdrücken . . . . .	1091
21.7.2.10	Rekursionsformeln für Integral mit binomischem Differential . . . . .	1091
21.7.3	Integrale trigonometrischer Funktionen . . . . .	1091
21.7.3.1	Integrale mit Sinusfunktion . . . . .	1091
21.7.3.2	Integrale mit Kosinusfunktion . . . . .	1094
21.7.3.3	Integrale mit Sinus- und Kosinusfunktion . . . . .	1096
21.7.3.4	Integrale mit Tangensfunktion . . . . .	1100
21.7.3.5	Integrale mit Kotangensfunktion . . . . .	1100
21.7.4	Integrale anderer transzendenter Funktionen . . . . .	1101
21.7.4.1	Integrale mit Hyperbelfunktionen . . . . .	1101
21.7.4.2	Integrale mit Exponentialfunktionen . . . . .	1102
21.7.4.3	Integrale mit logarithmischen Funktionen . . . . .	1103
21.7.4.4	Integrale mit inversen trigonometrischen Funktionen . . . . .	1105
21.7.4.5	Integrale mit inversen Hyperbelfunktion . . . . .	1106
21.8	Bestimmte Integrale . . . . .	1107
21.8.1	Bestimmte Integrale trigonometrischer Funktionen . . . . .	1107
21.8.2	Bestimmte Integrale von Exponentialfunktionen . . . . .	1108
21.8.3	Bestimmte Integrale logarithmischer Funktionen . . . . .	1109
21.8.4	Bestimmte Integrale algebraischer Funktionen . . . . .	1110
21.9	Elliptische Integrale . . . . .	1112
21.9.1	Elliptische Integrale 1. Gattung . . . . .	1112
21.9.2	Elliptische Integrale 2. Gattung . . . . .	1112
21.9.3	Vollständige elliptische Integrale K und E . . . . .	1113
21.10	Gammafunktion . . . . .	1114
21.11	Bessel-Funktionen (Zylinderfunktionen) . . . . .	1115
21.12	Legendresche Polynome 1. Art (Kugelfunktionen) . . . . .	1117
21.13	Laplace-Transformationen . . . . .	1118
21.14	Fourier-Transformationen . . . . .	1124
21.14.1	Fourier-Kosinus-Transformationen . . . . .	1124
21.14.2	Fourier-Sinus-Transformationen . . . . .	1130
21.14.3	Fourier-Transformationen . . . . .	1135
21.14.4	Exponentielle Fourier-Transformationen . . . . .	1137
21.15	Z-Transformationen . . . . .	1138
21.16	Poisson-Verteilung . . . . .	1141
21.17	Normierte Normalverteilung . . . . .	1143
21.18	$\chi^2$ -Verteilung . . . . .	1145
21.19	Fishersche $F$ -Verteilung . . . . .	1146
21.20	Studentsche $t$ -Verteilung . . . . .	1148
21.21	Zufallszahlen . . . . .	1149
<b>22</b>	<b>Literatur</b> . . . . .	<b>1150</b>
	<b>Stichwortverzeichnis</b> . . . . .	<b>1167</b>
	<b>Mathematische Zeichen</b> . . . . .	<b>1218</b>