

Florian Scheck

Mechanik

Von den Newtonschen Gesetzen
zum deterministischen Chaos

Fünfte, korrigierte Auflage

Mit 172 Abbildungen,

11 praktischen Übungen

und 118 Aufgaben mit vollständigen Lösungen



Springer

Professor Dr. Florian Scheck

Fachbereich Physik, Institut für Physik
Johannes Gutenberg-Universität, Staudingerweg 7
D-55099 Mainz

ISBN 3-540-61235-1 5. Auflage Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

ISBN 3-540-56781-X 4. Auflage Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Scheck, Florian:

Mechanik : von den Newtonschen Gesetzen zum deterministischen Chaos ; mit 11 praktischen Übungen und 118 Aufgaben mit vollständigen Lösungen / Florian Scheck. – 5., korr. Aufl. –

Berlin ; Heidelberg ; New York ; Barcelona ; Budapest ; Hongkong ; London ; Mailand ; Paris ; Santa Clara ; Singapur ; Tokio :

Springer, 1996

(Springer-Lehrbuch)

ISBN 3-540-61235-1

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1988, 1990, 1992, 1994, 1996

Printed in Germany

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: MetaDesign, Berlin

Satz: K + V Fotosatz, Beerfelden

Druck und Einband: Druckhaus Beltz, Hemsberg/Bergstraße

SPIN: 10535057

56/3144 - 5 4 3 2 1 0 - Gedruckt auf säurefreiem Papier

Inhaltsverzeichnis

1. Elementare Newtonsche Mechanik	1
1.0 Die Newtonschen Gesetze (1687) und ihre Interpretation	1
1.1 Gleichförmig geradlinige Bewegung und Inertialsysteme	4
1.2 Satz über Inertialsysteme	5
1.3 Impuls und Kraft	5
1.4 Typische Kräfte; Bemerkung über Maßeinheiten	7
1.5 Raum, Zeit und Kräfte	9
1.6 Das Zweiteilchensystem mit inneren Kräften	10
1.6.1 Schwerpunkts- und Relativbewegung	10
1.6.2 Beispiel: Gravitationskraft zwischen zwei Himmelskörpern (Keplerproblem)	10
1.6.3 Schwerpunkts- und Relativimpuls im Zweiteilchensystem	15
1.7 Systeme von endlich vielen Teilchen	15
1.8 Der Schwerpunktsatz	16
1.9 Der Drehimpulssatz	17
1.10 Der Energiesatz	17
1.11 Das abgeschlossene n -Teilchensystem	18
1.12 Galileitransformationen	19
1.13 Bemerkungen über Raum und Zeit bei Galileiinvarianz	22
1.14 Konservative Kraftfelder	24
1.15 Eindimensionale Bewegung eines Massenpunktes	26
1.16 Beispiele für Bewegungen in einer Dimension	27
1.16.1 Harmonischer Oszillator	27
1.16.2 Das ebene mathematische Pendel im Schwerfeld	28
1.17 Phasenraum für das n -Teilchensystem (im \mathbb{R}^3)	29
1.18 Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Lösungen von (1.41)	30
1.19 Physikalische Konsequenzen von Satz aus Abschnitt 1.18	31
1.20 Lineare Systeme	33
1.21 Zur Integration eindimensionaler Bewegungsgleichungen	35
1.22 Beispiel: Ebenes Pendel mit beliebigem Ausschlag	36
1.23 Beispiel: Zweiteilchensystem mit Zentralkraft	38
1.24 Rotierendes Koordinatensystem: Coriolis- und Zentrifugalkräfte	41
1.25 Beispiele zu Abschnitt 1.24	43
1.26 Streuung zweier Teilchen, die über eine Zentralkraft miteinander wechselwirken: Kinematik	45
1.27 Zweiteilchenstreuung mit Zentralkraft: Dynamik	48
1.28 Beispiel: Coulombstreuung zweier Teilchen mit gleichen Massen und Ladungen	51

1.29	Ausgedehnte mechanische Körper	54
1.30	Virial und zeitliche Mittelwerte	57
	Anhang: Praktische Übungen	59
2.	Die Prinzipien der kanonischen Mechanik	63
2.1	Zwangsbedingungen und verallgemeinerte Koordinaten	63
2.1.1	Definition von Zwangsbedingungen	63
2.1.2	Generalisierte Koordinaten	64
2.2	Das d'Alembertsche Prinzip	65
2.2.1	Definition der virtuellen Verrückungen	65
2.2.2	Statischer Fall	65
2.2.3	Dynamischer Fall	66
2.3	Die Lagrangeschen Gleichungen	67
2.4	Beispiele zu Abschnitt 2.3	68
2.5	Exkurs über Variationsprinzipien	70
2.6	Hamiltonsches Extremalprinzip	72
2.7	Die Euler-Lagrangegleichungen	73
2.8	Beispiele zu Abschnitt 2.7	74
2.9	Anmerkung über die Nicht-Eindeutigkeit der Lagrangefunktion	75
2.10	Eichtransformationen an der Lagrangefunktion	75
2.11	Zulässige Transformationen der verallgemeinerten Koordinaten	76
2.12	Die Hamiltonfunktion und ihr Zusammenhang mit der Lagrangefunktion L	78
2.13	Legendretransformation für den Fall einer Variablen	79
2.14	Legendretransformation im Fall mehrerer Veränderlicher	80
2.15	Kanonische Systeme	82
2.16	Beispiele zu Abschnitt 2.15	82
2.17	Variationsprinzip auf die Hamiltonfunktion angewandt	84
2.18	Symmetrien und Erhaltungssätze	84
2.19	Satz von E. Noether	85
2.20	Infinitesimale Erzeugende für Drehung um eine Achse	86
2.21	Exkurs über die Drehgruppe	88
2.22	Infinitesimale Drehungen und ihre Erzeugenden	90
2.23	Kanonische Transformationen	91
2.24	Beispiele von kanonischen Transformationen	95
2.25	Die Struktur der kanonischen Gleichungen	96
2.26	Beispiel: Lineares, autonomes System in einer Dimension	97
2.27	Kanonische Transformationen in kompakter Notation	99
2.28	Zur symplektischen Struktur des Phasenraums	101
2.29	Der Liouvillesche Satz	103
2.29.1	Lokale Form	104
2.29.2	Integrale Form	105
2.30	Beispiele zum Liouvilleschen Satz	106
2.31	Die Poissonklammer	108
2.32	Eigenschaften der Poissonklammern	110
2.33	Infinitesimale kanonische Transformationen	112
2.34	Integrale der Bewegung	114
2.35	Hamilton-Jacobische Differentialgleichung	116
2.36	Beispiele zur Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung	117

2.37	Hamilton-Jacobigleichung und integrable Systeme	121
2.37.1	Lokale Glättung von Hamiltonschen Systemen	121
2.37.2	Integrable Systeme	125
2.37.3	Winkel- und Wirkungsvariable	129
2.38	Störungen an quasiperiodischen Hamiltonschen Systemen	130
2.39	Autonome, nichtentartete Hamiltonsche Systeme in der Nähe von integrablen Systemen	133
2.40	Beispiele, Mittelungsmethode	134
2.40.1	Anharmonischer Oszillator	134
2.40.2	Mittlung von Störungen	136
	Anhang: Praktische Übungen	138
3.	Mechanik des starren Körpers	143
3.0	Definition des starren Körpers	143
3.1	Infinitesimale Verrückung eines starren Körpers	145
3.2	Kinetische Energie und Trägheitstensor	146
3.3	Eigenschaften des Trägheitstensors	147
3.4	Der Satz von Steiner	151
3.5	Beispiele zum Satz von Steiner	151
3.6	Drehimpuls des starren Körpers	154
3.7	Kräftefreie Bewegung von starren Körpern	155
3.8	Die Eulerschen Winkel	157
3.9	Definition der Eulerschen Winkel	158
3.10	Die Bewegungsgleichungen des starren Körpers	159
3.11	Die Eulerschen Gleichungen	162
3.12	Anwendungsbeispiel: Der kräftefreie Kreisel	164
3.13	Kräftefreier Kreisel und geometrische Konstruktionen	167
3.14	Der Kreisel im Rahmen der kanonischen Mechanik	169
3.15	Beispiel: Symmetrischer Kinderkreisel im Schwerfeld	172
3.16	Anmerkung zum Kreiselproblem	174
3.17	Symmetrischer Kreisel mit Reibung: Der „Aufstehkreisel“	175
3.17.1	Eine Energiebetrachtung	177
3.17.2	Bewegungsgleichungen und Lösungen konstanter Energie	179
	Anhang: Praktische Übungen	182
4.	Relativistische Mechanik	185
4.0	Schwierigkeiten der nichtrelativistischen Mechanik	186
4.1	Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit	188
4.2	Die Lorentztransformationen	189
4.3	Analyse der Lorentz- und Poincarétransformationen	194
4.3.1	Drehungen und Spezielle Lorentztransformationen	196
4.3.2	Bedeutung der Speziellen Lorentztransformationen	199
4.4	Zerlegung von Lorentztransformationen in ihre Komponenten	200
4.4.1	Satz über orthochrone eigentliche Lorentztransformationen	200
4.4.2	Korollar zum Satz 4.4.1 und einige Konsequenzen	202
4.5	Addition von relativistischen Geschwindigkeiten	205
4.6	Galilei- und Lorentz-Raumzeitmannigfaltigkeiten	207
4.7	Bahnkurven und Eigenzeit	211
4.8	Relativistische Dynamik	212

4.8.1	Relativistisches Kraftgesetz	212
4.8.2	Energie-Impulsvektor	213
4.8.3	Die Lorentzkraft	216
4.9	Zeitdilatation und Längenkontraktion	218
4.10	Mehr über die Bewegung kräftefreier Teilchen	219
4.11	Die konforme Gruppe	222
5.	Geometrische Aspekte der Mechanik	225
5.1	Mannigfaltigkeiten von verallgemeinerten Koordinaten	226
5.2	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	228
5.2.1	Der Euklidische Raum \mathbb{R}^n	228
5.2.2	Glatte oder differenzierbare Mannigfaltigkeiten	229
5.2.3	Beispiele für glatte Mannigfaltigkeiten	231
5.3	Geometrische Objekte auf Mannigfaltigkeiten	235
5.3.1	Funktionen und Kurven auf Mannigfaltigkeiten	236
5.3.2	Tangentialvektoren an eine glatte Mannigfaltigkeit	238
5.3.3	Das Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit	239
5.3.4	Vektorfelder auf glatten Mannigfaltigkeiten	241
5.3.5	Äußere Formen	244
5.4	Kalkül auf Mannigfaltigkeiten	246
5.4.1	Differenzierbare Abbildungen von Mannigfaltigkeiten	246
5.4.2	Integralkurven von Vektorfeldern	248
5.4.3	Äußeres Produkt von Einsformen	249
5.4.4	Die äußere Ableitung	251
5.4.5	Äußere Ableitung und Vektoren im \mathbb{R}^3	252
5.5	Hamilton-Jacobische und Lagrangesche Mechanik	255
5.5.1	Koordinatenmannigfaltigkeit Q , Geschwindigkeitsraum TQ , und Phasenraum T^*Q	255
5.5.2	Die kanonische Einsform auf dem Phasenraum (T^*Q)	258
5.5.3	Die kanonische Zweiform als symplektische Form auf M	261
5.5.4	Symplektische Zweiform und Satz von Darboux	262
5.5.5	Die kanonischen Gleichungen	265
5.5.6	Die Poissonklammer	268
5.5.7	Zeitabhängige Hamiltonsche Systeme	271
5.6	Lagrangesche Mechanik und Lagrangegleichungen	273
5.6.1	Zusammenhang der beiden Formulierungen der Mechanik	273
5.6.2	Die Lagrangesche Zweiform	274
5.6.3	Energie als Funktion auf TQ und Lagrangesches Vektorfeld	276
5.6.4	Vektorfelder auf dem Geschwindigkeitsraum TQ und Lagrangesche Gleichungen	277
5.6.5	Legendretransformation und Zuordnung von Lagrange- und Hamiltonfunktion	279
5.7	Riemannsche Mannigfaltigkeiten in der Mechanik	282
5.7.1	Affiner Zusammenhang und Paralleltransport	282
5.7.2	Parallele Vektorfelder und Geodäten	285
5.7.3	Geodäten als Lösungen von Euler-Lagrangegleichungen	285
5.7.4	Beispiel: Kräftefreier, unsymmetrischer Kreisel	286

6. Stabilität und Chaos	289
6.0 Qualitative Dynamik	289
6.1 Vektorfelder als dynamische Systeme	290
6.1.1 Einige Definitionen für Vektorfelder und ihre Integralkurven	292
6.1.2 Gleichgewichtslagen und Linearisierung von Vektorfeldern	294
6.1.3 Stabilität von Gleichgewichtslagen	297
6.1.4 Kritische Punkte von Hamiltonschen Vektorfeldern	299
6.1.5 Stabilität und Instabilität beim kräftefreien Kreisel	302
6.2 Langzeitverhalten dynamischer Flüsse und Abhängigkeit von äußeren Parametern	303
6.2.1 Strömung im Phasenraum	304
6.2.2 Allgemeinere Stabilitätskriterien	305
6.2.3 Attraktoren	308
6.2.4 Die Poincaréabbildung	311
6.2.5 Verzweigungen von Flüssen bei kritischen Punkten	315
6.2.6 Verzweigungen von periodischen Bahnen	318
6.3 Deterministisches Chaos	320
6.3.1 Iterative Abbildungen in einer Dimension	320
6.3.2 Quasi-Definition von Chaos	322
6.3.3 Ein Beispiel: Die logistische Gleichung	324
6.4 Quantitative Aussagen über ungeordnete Bewegung	328
6.4.1 Aufbruch in deterministisches Chaos	328
6.4.2 Liapunovsche Charakteristische Exponenten	332
6.4.3 Seltsame Attraktoren und Fraktale	335
6.5 Chaotische Bewegungen in der Himmelsmechanik	336
6.5.1 Rotationsdynamik von Planetensatelliten	337
6.5.2 Bahndynamik von Planetoiden mit chaotischem Verhalten	341
7. Kontinuierliche Systeme	345
7.1 Diskrete und kontinuierliche Systeme	345
7.2 Grenzübergang zum kontinuierlichen System	349
7.3 Hamiltonsches Extremalprinzip für kontinuierliche Systeme	350
7.4 Kanonisch konjugierter Impuls und Hamiltondichte	352
7.5 Beispiel: Die Pendelkette	353
7.6 Bemerkungen	357
Anhang	361
A. Einige mathematische Begriffe	361
B. Einige Hinweise zum Rechnereinsatz	364
C. Historische Anmerkungen	368
Literatur	373
Aufgaben	377
Lösungen der Aufgaben	395
Sachverzeichnis	439