

# Lineare Modelle

Algebraische Grundlagen und  
statistische Anwendungen

Von

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Wilhelm Caspary

und

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Klaus Wichmann

R. Oldenbourg Verlag München Wien

## INHALTSVERZEICHNIS

	Vorwort	XI
1	<b>VEKTOREN UND MATRIZEN</b>	1
1.1	<b>VEKTOREN UND VEKTORRÄUME</b>	1
1.1.1	Reelle Vektorräume	1
1.1.2	Basis und Dimension	2
1.1.3	Lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen	4
1.1.4	Euklidische Vektorräume	4
1.1.5	Summe und Zerlegung von Vektorräumen	5
1.1.6	Projektionen	8
1.1.7	Lineare Mannigfaltigkeiten	10
1.2	<b>MATRIZEN</b>	12
1.2.1	Addition und skalare Multiplikation	12
1.2.2	Matrizenprodukt	13
1.2.3	Quadratische Matrizen und reguläre Inverse	14
1.2.4	Rechenregeln der Matrizenalgebra	15
1.2.5	Partitionierung in Submatrizen	16
1.2.6	Der Rang als charakteristische Matrixgröße	17
1.2.7	Elementare Umformungen	19
1.2.8	Darstellung von linearen Abbildungen durch Matrizen	21
1.2.9	Äquivalenz- und Orthogonaltransformation	23
1.2.10	Zeilenraum, Spaltenraum und Nullraum	24
1.2.11	Die Matrix $A_1$	25
1.2.12	Lineare Gleichungssysteme	26
1.2.13	Die MPB - Inverse	27
1.2.14	Determinante und Spur einer quadratischen Matrix	29
1.2.15	Die Neumannsche Reihe	32
1.3	<b>EIGENWERTE UND MATRIXZERLEGUNGEN</b>	34
1.3.1	Spezielles Eigenwertproblem	34
1.3.2	Algebraische und geometrische Vielfachheit	35
1.3.3	Eigenwerte rationaler Matrixfunktionen	36
1.3.4	Invarianz der Eigenwerte bei Ähnlichkeitstransformationen	37
1.3.5	Eigenwerte symmetrischer Matrizen	39
1.3.6	Spektralzerlegung	40
1.3.7	Verallgemeinertes Eigenwertproblem	41
1.3.8	Kanonische Form und Normalform	41
1.3.9	LR - Zerlegung	42
1.3.10	Singulärwertzerlegung	43
1.3.11	Cholesky - Zerlegung	45

1.4	<b>QUADRATISCHE FORMEN</b>	47
1.4.1	Nichtnegativ definite quadratische Formen	47
1.4.2	Hauptachsentransformation definiter Matrizen	49
1.4.3	Eigenwerte nichtnegativ definiter Matrizen	50
1.4.4	Zerlegung quadratischer Formen	51
1.4.5	Bedingungen für die Elemente definiter Matrizen	53
1.4.6	Abschätzung der Eigenwerte symmetrischer Matrizen	54
1.4.7	Zerlegung der Spaltenräume von Summen und Produkten	56
1.5	<b>VEKTOR- UND MATRIXNORMEN</b>	60
1.5.1	Normierte Vektorräume	60
1.5.2	Kompatibilität von Matrixnormen mit Vektornormen	61
1.5.3	Eigenschaften und Anwendungen von Normen	63
1.5.4	Kondition einer Matrix	65
1.6	<b>PROJEKTIONEN</b>	68
1.6.1	Projektionseigenschaft idempotenter Matrizen	68
1.6.2	Vorgegebene Projektionsrichtungen	68
1.6.3	M-orthogonale Projektionen	70
1.6.4	Abstandsminimierung in seminormierten Räumen	72
1.6.5	Q- und $Q^{-1}$ -orthogonale Projektionen im $\mathcal{E}^m$	75
1.7	<b>DIFFERENTIATION VON MATRIZEN</b>	78
2	<b>INVERSE MATRIZEN</b>	81
2.1	<b>INVERSEN REGULÄRER MATRIZEN</b>	81
2.1.1	Inversen von partitionierten Matrizen	81
2.1.2	Links- und Rechtsinverse	82
2.2	<b>DIE ALLGEMEINE INVERSE</b>	84
2.2.1	Definition und Rangeigenschaften	84
2.2.2	g-Inverse bei vorgegebener LR-Zerlegung	84
2.2.3	Unbestimmtheit generalisierter Inversen	85
2.2.4	Einfache Form einer g-Inversen	86
2.2.5	Reflexive g-Inverse	87
2.2.6	Gesamtheit der g-Inversen	88
2.2.7	Projektoren	88
2.2.8	Rechenregeln	89
2.2.9	Projektionen auf Spaltenräume beliebiger Matrizen	91
2.2.10	Lineare Gleichungssysteme	93
2.2.11	Gleichungssysteme mit Matrizen als Unbekannten	94
2.3	<b>G-INVERSEN NICHTNEGATIV DEFINITER MATRIZEN</b>	97
2.3.1	Invarianz bezüglich der Wahl der g-Inversen	97
2.3.2	Projektoren in seminormierten Spaltenräumen	98
2.3.3	Nichtnegativ definite g-Inversen	98

2.3.4	g-Inversen von Summen nichtnegativ definiter Matrizen	99
2.4	<b>DIE MKQ-INVERSE (Methode der Kleinsten Quadrate)</b>	105
2.4.1	Normalgleichungen für inkonsistente Gleichungssysteme	105
2.4.2	Existenz der MKQ-Inversen	105
2.4.3	Menge aller MKQ-Inversen	107
2.4.4	MKQ-Lösungen inkonsistenter Gleichungssysteme	108
2.4.5	Reflexive MKQ-Inversen	109
2.5	<b>DIE MNX-INVERSE (Minimale N-Norm von <math>\underline{x}</math>)</b>	112
2.5.1	Existenz und Eigenschaften von MNX-Inversen	112
2.5.2	Lagrange-Multiplikatorenmethode	113
2.5.3	Menge aller MNX-Inversen einer $m \times n$ -Matrix	114
2.5.4	Reflexive MNX-Inversen	115
2.5.5	Zusammenhang zwischen MKQ- und MNX-Inversen	117
2.6	<b>DIE MPB-INVERSE (Moore-Penrose-Bjerrhammar-Inverse)</b>	119
2.6.1	Definition und Bedingungsgleichungen	119
2.6.2	Darstellungen für $A_{MN}^+$	120
2.6.3	Die Pseudoinverse $A^+$	122
2.7	<b>G-INVERSEN PARTITIONIERTER MATRIZEN</b>	127
2.7.1	1x2-Partitionierung	127
2.7.2	Nichtnegativ definite 2x2-Partitionen	129
2.7.3	2x2-Partitionen $(M_{ik})$ mit $M_{22} = 0$	131
2.7.4	Berechnung von $A^+$ durch sukzessive Partitionierung	137
	Literatur	139
3	<b>BERECHNUNG VON MPB-INVERSEN</b>	142
3.1	<b>VORBETRACHTUNGEN ZU NUMERIK, KONDITION UND RANG</b>	142
3.1.1	Schlecht konditionierte Gleichungssysteme	143
3.1.2	Störungen und Rundungsfehler	145
3.2	<b>GAUSSSCHE ELIMINATION</b>	148
3.3	<b>HOUSEHOLDER TRANSFORMATION</b>	151
3.4	<b>GRAM - SCHMIDT - ORTHOGONALISIERUNG</b>	156
3.5	<b>SINGULÄRWERT - ZERLEGUNG</b>	159
3.6	<b>REGULARISIERUNG DURCH RÄNDERN</b>	161
3.7	<b>REGULARISIERUNG DES PRODUKTES <math>A^t A</math></b>	164
3.8	<b>INVERSION EINER REGULÄREN BLOCKMATRIX</b>	169
3.9	<b>REKURSIVE BERECHNUNG VON <math>A^+</math></b>	171
	Literatur	172

<b>4</b>	<b>STATISTISCHE GRUNDLAGEN</b>	<b>175</b>
4.1	<b>NORMALVERTEILTE ZUFALLSVEKTOREN</b>	175
4.1.1	Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilungsfunktion	175
4.1.2	Rechenregeln für die Erwartungswertbildung	179
4.1.3	N-dimensionale Normalverteilung	180
4.1.4	Testverteilungen	184
4.2	<b>DIE SINGULÄRE NORMALVERTEILUNG</b>	188
4.3	<b>VERTEILUNG QUADRATISCHER FORMEN</b>	191
4.3.1	Erwartungswert und Spur quadratischer Formen	191
4.3.2	Chi-Quadrat Verteilungen quadratischer Formen	192
4.3.3	Stochastische Unabhängigkeit quadratischer Formen	194
	Literatur	196
<b>5</b>	<b>LINEARE MODELLE</b>	<b>198</b>
5.1	<b>DAS GAUSS-MARKOV MODELL</b>	199
5.1.1	Modelldefinition	199
5.1.2	Der Beobachtungs- und der Fehlerraum	201
5.2	<b>GAUSS-MARKOV MODELL MIT RESTRIKTIONEN</b>	203
5.3	<b>MODELLE MIT ZUFALLSPARAMETERN</b>	205
5.4	<b>DAS STOCHASTISCHE MODELL</b>	208
5.5	<b>MODELLTRANSFORMATIONEN</b>	211
5.5.1	Homogenisierung des Modells	211
5.5.2	Äquivalenz des QSLM zum BRLM	213
5.6	<b>SCHÄTZBARE FUNKTIONEN IN LINEAREN MODELLEN</b>	215
5.6.1	Schätzbarkeit des Parametervektors	215
5.6.2	Schätzbare Linearformen der Parameter	216
5.6.3	Charakterisierung von Schätzern minimaler Varianz	218
5.7	<b>DIE LINEARE HYPOTHESE</b>	222
5.7.1	Testbare Hypothesen in linearen Modellen	222
5.7.2	Die normale lineare Hypothese	224
5.7.3	Quadratische Formen bei richtiger Hypothese	226
	Literatur	227
<b>6</b>	<b>MODELLE MIT REGULÄRE R VARIANZ-KOVARIANZ MATRIX <math>\Sigma</math></b>	<b>231</b>
6.1	<b>SCHÄTZBARE LINEARFORMEN</b>	233
6.1.1	Charakterisierung schätzbarer Linearformen	233
6.1.2	Schätzbarkeit linearer Transformationen	236
6.1.3	Schätzen des Parametervektors	237

6.1.4	Restriktionen zur Schätzung der Parameter im ASLM	238
6.1.5	Referenzsystem für die Parameterschätzung	241
6.1.6	Schätzung der Modellkomponenten	243
6.1.7	Linearformen mit verschwindendem Erwartungswert	246
<b>6.2</b>	<b>SCHÄTZUNG DES VARIANZFAKTORS</b>	<b>248</b>
6.2.1	Erwartungstreue Schätzer des Varianzfaktors	248
6.2.2	Optimale Schätzung des Varianzfaktors	249
<b>6.3</b>	<b>MODELLE MIT RESTRIKTIONEN</b>	<b>253</b>
6.3.1	Schätzbare Linearformen	253
6.3.2	Reparametrisierung	259
6.3.3	Separierung der Restriktionen	262
6.3.4	Äußere Restriktionen im BASLM	265
6.3.5	Innere Restriktionen	269
6.3.6	Innere und äußere Restriktionen	273
6.3.7	Schätzung der Modellkomponenten	277
6.3.8	Varianzfaktor im Modell mit Restriktionen	282
<b>6.4</b>	<b>HYPOTHESENTESTS BEI REGULÄRER VKM <math>\Sigma</math></b>	<b>286</b>
6.4.1	Schätzung bei linearer Hypothese	286
6.4.2	Teststatistik für die normale lineare Hypothese	289
6.4.3	Projektionsdarstellung	292
6.4.4	Lineare Hypothese in Modellen mit Restriktionen	295
<b>7</b>	<b>MODELLE MIT SINGULÄRER VARIANZ-KOVARIANZ-MATRIX <math>\Sigma</math></b>	<b>300</b>
<b>7.1</b>	<b>ANALYSE DES MODELLRAUMES</b>	<b>300</b>
7.1.1	Die Modellraummatrix	301
7.1.2	Darstellungen des Modellraumes	301
7.1.3	$T^-$ -orthogonale Zerlegung des Modellraumes	303
7.1.4	$T^-$ -orthogonale Projektoren im Modellraum	305
<b>7.2</b>	<b>SCHÄTZBARE LINEARFORMEN</b>	<b>311</b>
7.2.1	Herleitung des Schätzers nach der Lagrangeschen Methode	311
7.2.2	Charakterisierung linearer Schätzer	313
7.2.3	Projektionsdarstellung des Schätzers	314
7.2.4	Lineare Parametertransformationen	315
7.2.5	Schätzung des Parametervektors	316
7.2.6	Die Methode der kleinsten Quadrate	320
7.2.7	Schätzer der Modellkomponenten	326
<b>7.3</b>	<b>SCHÄTZUNG DES VARIANZFAKTORS</b>	<b>331</b>
<b>7.4</b>	<b>RESTRIKTIONEN</b>	<b>336</b>
7.4.1	Der Parameterraum	336
7.4.2	Schätzbare Funktionen	339

7.4.3	Reparametrisierung	343
7.4.4	Äußere und innere Restriktionen	345
7.4.5	Schätzung der Modellkomponenten	352
7.4.6	Quadratische Form und Varianzfaktor	357
7.5	<b>TEST LINEARER HYPOTHESEN BEI SINGULÄRER VKM</b>	362
7.5.1	Schätzung bei linearer Hypothese	362
7.5.2	Teststatistiken bei singulärer VKM	366
7.5.3	Geometrische Deutung der linearen Hypothese	367
	Literatur (zu 6 und 7)	369
	Monographien und Lehrbücher	371
	<b>SACHWORTVERZEICHNIS</b>	374
	<b>LISTE VON SYMBOLEN UND ABKÜRZUNGEN</b>	380