Mario Gerwig

Der Satz des Pythagoras in 365 Beweisen

Mathematische, kulturgeschichtliche und didaktische Überlegungen zum vielleicht berühmtesten Theorem der Mathematik

Springer Spektrum

Der Satz des Pythagoras in 365 Beweisen

Mario Gerwig

Der Satz des Pythagoras in 365 Beweisen

Mathematische, kulturgeschichtliche und didaktische Überlegungen zum vielleicht berühmtesten Theorem der Mathematik

Mit einem Geleitwort von Günter M. Ziegler

Springer Spektrum

Mario Gerwig
Basel, Schweiz

ISBN 978-3-662-62885-0 ISBN 978-3-662-62886-7 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-62886-7

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Iris Ruhmann
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Geleitwort

Den Satz des Pythagoras kennen wir alle aus der Schule, üblicherweise in der Form $a^2 + b^2 = c^2$, die an sich ja gar nichts bedeutet, solange man die Buchstaben a, b und c nicht als geometrische Größen interpretiert. Meiner Meinung nach ist er von fundamentaler Bedeutung, weil er uns sagt, wie man in einem kartesischen Koordinatensystem Abstände misst – was an sich überraschend ist, weil Koordinatensysteme in der Antike ja wohl noch nicht bekannt waren; die Bedeutung, die ich gerade formuliert habe, ist also viel neuer als der Satz. Warum war „der Pythagoras" schon vor so langer Zeit interessant und faszinierend? Vielleicht, weil er an einer ganz einfachen, elementaren Figur, einem rechtwinkligen Dreieck, eine Beziehung zwischen Geometrie und Algebra herstellt. Ist denn überhaupt klar, dass es für eine geometrische Figur (ein rechtwinkliges Dreieck) eine algebraische Beziehung (zwischen den Seitenlängen) geben sollte, die sich mit den „üblichen" arithmetischen Operationen einfach ausdrücken lässt? Dass es also eine ganz enge, einfache, explizite *Verbindung zwischen Geometrie und Algebra* gibt? (So offensichtlich ist das nicht! Man studiere etwa an einer Ellipse den Zusammenhang zwischen den Längen der Achsen und dem Umfang!)

Und warum stimmt der Satz dann, und zwar exakt, und nicht nur ungefähr, und zwar für alle rechtwinkligen Dreiecke, und nicht nur für viele oder die meisten? Weil man ihn *beweisen* kann! (Anders ist das offenbar in der Physik, wo es nicht um „richtig oder falsch" geht, sondern darum, dass die postulierten Gesetzmäßigkeiten zu den Experimenten passen – wo aber die Schönheit einer Formel das erste Kriterium sein sollte, wenn man dem Physiker Paul Dirac glauben will, der geschrieben hat: *„This result is too beautiful to be false; it is more important to have beauty in one's equations than to have them fit experiment."*)

Man kann und man muss den Satz des Pythagoras also beweisen, das sollte man dann also auch mit Freuden tun, und ein Beweis sollte genauso zum Allgemeinwissen gehören wie der Satz des Pythagoras selbst. Nun gilt aber auch: *„Beweisen ist zwar das Charakteristikum der Mathematik, gehört bei den meisten Schülerinnen und Schülern aber nicht zu den liebsten Tätigkeiten"* wie mir Mario Gerwig schrieb, um mir sein Buchprojekt vorzustellen – wie schade, finden wir beide!

Der Satz des Pythagoras ist nur deshalb ein Satz, weil es für ihn einen Beweis gibt. Und, das liefert die Grundlage für dieses Buch: Es gibt viele, sehr unterschiedliche Beweise. Es gibt eben nicht den einen, perfekten Beweis, den *Proof from THE BOOK* (um auf die Erzählung von Paul Erdős zu verweisen, wonach Gott ein Buch habe, THE BOOK, in dem die perfekten Beweise verzeichnet seien. Und als Mathematiker müsse man nicht an Gott glauben, aber an THE BOOK). Es gibt viele Beweise, und das ist eine Chance und Gelegenheit, in vielerlei Hinsicht. Zunächst erhöht das die Sicherheit, dass der Satz stimmt. (Einer meiner akademischen Lehrer, James R. Munkres, hat in der Vorlesung augenzwinkernd behauptet: *„If you have several proofs for a theorem, it is more true.“*) Aber in vielen Bereichen der Mathematik ist es gut und wertvoll und wichtig, viele Beweise zu haben. So hat Carl Friedrich Gauß für seinen „quadratischen Reziprozitätssatz“ insgesamt acht verschiedene Beweise angegeben – und dann ging's erst richtig los in der Zahlentheorie. Unterschiedliche Beweise für einen Satz zu haben ist auch deshalb wertvoll, weil man aus unterschiedlichen Beweisen unterschiedliches Neues lernen kann, weil die unterschiedlichen Beweise vielleicht unterschiedliche Verallgemeinerungen nahelegen, für den Satz des Pythagoras etwa den Kosinussatz, der den Satz des Pythagoras stark verallgemeinert, den Pythagoras mangels Kosinus aber noch gar nicht formulieren konnte.

Aus den vielen verschiedenen Beweisen für den Satz des Pythagoras können wir unter anderem lernen, wie unterschiedlich Beweise sein können: Die können kurz oder lang sein, kurzweilig oder langweilig, richtig oder fast richtig (= falsch), kompliziert oder einfach, ideenreich oder Routine, elementar oder technisch, „trivial“ oder trickreich, abstrakt und undurchsichtig oder sehr anschaulich, neu oder uralt, geometrisch oder algebraisch.

Können Beweise auch gut oder schlecht sein? Auf den ersten Blick nicht: Jeder korrekte Beweis ist gut, ein falscher oder lückenhafter Beweis ist kein Beweis. Aber so einfach ist das dann doch nicht, ein lückenhafter oder falscher Beweis kann korrigierbar oder zumindest inspirierend sein (wie etwa der erste Beweis, den Andrew Wiles für den *Satz von Fermat* angegeben hatte: falsch aber inspirierend). Und gute Beweise sind die Beweise, aus denen wir etwas lernen können. *„Good proofs are proofs that make you wiser“,* hat der weise Mathematiker Yuri Manin in einem Interview gesagt.

In diesem Buch liegt die Vielfalt der Beweise vor für eine ganz konkrete, interessante und faszinierende Aussage, den Satz des Pythagoras – aus einer historischen Quelle, kundig und kritisch kommentiert. Mathematik-Lehrende erleben anhand einer mehrfach erprobten Unterrichtseinheit, warum die Beweisvielfalt des Satzes auch im Unterricht eine zentrale Rolle spielen sollte und wie es gelingen kann, dieses Vorhaben erfolgreich umzusetzen. Man kann viel an diesem Buch lernen, die Vielfalt von Beweisen kennenlernen, sich davon inspirieren lassen, und sich daran freuen.

Freie Universität Berlin
im Oktober 2020

Prof. Günter M. Ziegler

Vorwort

Der schöpferische Mathematiker sucht jede Idee bis zur Erschöpfung der Möglichkeiten, die sie in sich trägt, auszuwerten, jeden mathematischen Sachverhalt mit reger, schöpferischer Phantasie von verschiedenen Seiten her anzugehen, um ihn auf möglichst vielfältige Weise zu beweisen und einzuordnen und dabei immer besser zu verstehen. In seinem mathematischen Königreich will er jeden Gipfel auf möglichst vielen Wegen erklimmen, von jedem Weg erhofft er sich aber auch neue und überraschende Aussichten auf jene Berge, die er schon bestiegen hat, und auf das Land, das sich zu ihren Füßen erstreckt.

Alexander I. Wittenberg (1926–1965)

Man sucht oft nach neuen Beweisen für mathematische Sätze, die bereits als richtig erkannt wurden, einfach weil den vorhandenen Beweisen die Schönheit fehlt. Es gibt mathematische Beweise, die lediglich zeigen, dass etwas richtig ist. Es gibt andere Beweise, die unseren Verstand begeistern und verzaubern. Sie wecken ein Entzücken und den übermächtigen Wunsch, einfach nur ‚Amen, Amen!' zu sagen.

Morris Kline (1908–1992)

Die Sammlung von über 350 verschiedenen Beweisen für den *Satz des Pythagoras,* die Elisha Scott Loomis (1852–1940) zu Beginn des 20. Jahrhunderts erstellt hat, die 1927 – in einer zweiten Auflage 1940 (Nachdruck: 1968) – erschienen ist und die Ausgangspunkt und Inspirationsquelle des vorliegenden Buches darstellt, mag zunächst überreichlich, vielleicht unbescheiden erscheinen. Wozu, wo doch ein einziger gültiger Beweis ausreicht, um den Satz für alle Zeiten zu beweisen?

Der vielleicht berühmteste Satz der Mathematik hat über Jahrhunderte hinweg einen erstaunlichen Reiz auf Personen sämtlicher Kulturkreise ausgeübt: Es gibt Beweise aus dem antiken Griechenland und dem alten China, von Künstlern und Philosophen, Mathematikprofis und -amateuren. Der entscheidende Wert dieser Sammlung ist daher nicht, die Richtigkeit des Satzes auf vielfältige Art zu belegen. Sie hat größeres Potential: Bei welchem Thema kann es gelingen, Euklid von Alexandria und einen amerikanischen Präsidenten, Leonardo da Vinci und Gottfried Wilhelm Leibniz, indische und persische Mathematiker, Seilspanner aus dem alten Ägypten, Architekten aus dem antiken Griechenland sowie Zimmermänner und Maurer von heute an einen Tisch zu bringen? Die *Loomis-Sammlung* ist Kristallisationskern einer Geistes- und Kulturgeschichte der Mathematik, hochexemplarisch verdichtet am pythagoreischen Lehrsatz, einem der zentralen Sätze der elementaren Geometrie und einem der wichtigsten Sätze der Schulmathematik. Mehr noch: Die Möglichkeit, Aussagen ein für alle Mal zu beweisen, ist ein Privileg, das der Mathematik vorbehalten ist. Erst durch die Entdeckung des Beweisens im antiken Griechenland haben sich die rein numerologischen Betrachtungen der Ägypter und Babylonier zu einer Kunst der Deduktion, zur Wissenschaft weiterentwickelt. Beweisen ist *das* Charakteristikum der Mathematik. Gleichzeitig stellt dieses Charakteristikum Unterricht und Lehre vor eine gewaltige Herausforderung. Die anspruchsvolle Tätigkeit des Beweisens gehört in Schule und Universität zu den zentralen Inhalten, doch zu verstehen, was es mit dem Beweisen eigentlich auf sich hat, ist eine ihrer großen Herausforderungen. Das Studium *vieler* Beweisprodukte *eines* Satzes kann einen Zugang zu dieser Meta-Ebene eröffnen.

Die nun vorliegende, übersetzte, grundlegend überarbeitete und deutlich ergänzte Auflage der seit über 50 Jahren vergriffenen und nun erstmals auf Deutsch erscheinenden *Loomis-Sammlung* hat dies zu bieten. Der Satz des Pythagoras wird eingebettet in die Mathematik der Pythagoreer, die Vielfalt der Beweise ermöglicht einen Einblick in die Kulturgeschichte des Beweisens und die bildungstheoretischen und fachdidaktischen Überlegungen im Rahmen einer ausführlich dargestellten, mehrfach durchgeführten Unterrichtseinheit verdeutlichen die überaus große Bedeutung des Satzes für die Kulturgeschichte der Mathematik und den Bildungswert des Mathematikunterrichts.

Ein Beweis für jeden Tag des Jahres – der Autor wünscht eine anregende Lektüre.

Basel
im Mai 2021

Mario Gerwig

Einleitung

„The object of this work is to present to the future investigator, under one cover, simply and concisely, what is known relative to the Pythagorean Proposition, and to set forth certain established facts concerning the proofs and geometric figures pertaining thereto.“

Mit diesem Satz beginnt Elisha Scott Loomis (1852–1940) das Vorwort der 1927 erschienenen ersten Auflage seiner umfassenden Sammlung von Pythagoras-Beweisen.[1] Es soll auch für diese, völlig überarbeitete und ergänzte Version der *Loomis-Sammlung,* wie sie im Folgenden bezeichnet wird, als Leitgedanke dienen.

Elisha Scott Loomis wurde 1852 in Wadsworth, Ohio, geboren. Sein Vater starb, als Loomis zwölf Jahre alt war, so dass er schon früh viel Verantwortung für seine sieben jüngeren Geschwister hat übernehmen müssen. Im Alter von 13 bis 20 Jahren arbeitete er in den Sommermonaten als Landarbeiter, im Winter besuchte er die örtliche Schule. Sein Lehrer konnte jedoch den Wunsch, Mathematik zu lernen, kaum erfüllen, so dass er sich eine Ausgabe des Buchs *Ray's Algebra* (1850)[2] – ein Buch geschrieben für Mathematiklehrpersonen – besorgte und dies im Selbststudium durcharbeitete. 1873 begann Loomis, Mathematik zu unterrichten, gleichzeitig begann er als Assistent am *Chair of Mathematics* an der Baldwin University in Berea, Ohio. Sein Studium, das er parallel absolvierte, schloss er sehr erfolgreich ab.[3] Nachdem er von 1880–1885 als Schulleiter arbeitete, übernahm er 1885 den Lehrstuhl für Mathematik an der Baldwin University

[1]Loomis, E. S. (1927): *The Pythagorean Proposition. Its Proofs Analyzed and Classified and Bibliography of Sources For Data of the Four Kinds of Proofs.* Cleveland: Masters and Wardens Association of the 22nd Masonic District of the Most Worshipful Grand Lodge of Free and Accepted Masons of Ohio.

[2]Ray, J. (1850): *Ray's Algebra. Part First: On the Analytic and Inductive Methods of Instruction: With Numerous Practical Exercises. Designed for Common Schools and Academies.* Cincinnati: Winthrop B. Smith & Co.

[3]1880: Bachelor of Science (B.S.); 1886: Master of Arts (*artium magister,* A.M.); 1888: Doctor of Philosophy (Ph.D.), Wooster University, Ohio; 1900: Bachelor of Laws (LL.B), Cleveland Law School, Ohio

und wechselte 1895 an die West High School, Cleveland, Ohio, wo er die Leitung des *Mathematics Department* übernahm – eine Position, die er für die nächsten 29 Jahre behalten sollte. Gegen Ende seines Lebens schrieb er, dass er in seinen 50 Jahren als Lehrer rund 4000 junge Menschen unterrichtet habe und die Bezeichnung *teacher* höher schätzen würde als jede andere Auszeichnung. Loomis starb am 11. Dezember 1940, kurz nach dem Erscheinen der zweiten Auflage seiner Pythagoras-Beweis-Sammlung.

Das erste Manuskript dieser Sammlung erstellte Loomis 1907. Es wurde 1927 publiziert und enthielt 230 verschiedene Beweise, die Loomis aus verschiedenen mathematischen Monographien und Zeitschriften (insb. *American Mathematical Monthly* (1894–1901) und Versluys, J. (1914): *96 bewijzen voor het theorema van Pythagoras;* vgl. Literaturverzeichnis für vollständige Angaben) zusammengesucht hatte. In der Folge wurden Loomis zahlreiche weitere Pythagoras-Beweise zugesandt, die er alle zusammen mit weiteren von ihm recherchierten und entwickelten Beweisen in die 1940 erschienene zweite Auflage einarbeitete. Sie enthielt nun 370 Beweise und erschien als Nachdruck 1968 als erstes Buch der vom *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) herausgegebenen Serie *Classics in Mathematics Education.*[4] Seither ist das Buch vergriffen.

Warum erscheint dieses Buch nun über 50 Jahre später in einer völlig überarbeiteten und erweiterten Version noch einmal? Das NCTM begründete die Publikation des Nachdrucks 1968 folgendermaßen: „Some mathematical works of considerable vintage have a timeless quality about them. Like classics in any field, they still bring joy and guidance to the reader. (…) This book is the first such classic deemed worthy of once again being made available to the mathematics education community.“ Es ist kaum zu bestreiten, dass der Satz des Pythagoras auch heute noch zu den zentralen Inhalten der Schulmathematik gehört und vermutlich derjenige Satz ist, der Schülerinnen und Schülern auch noch lange nach der Schulzeit am ehesten im Gedächtnis bleibt: *aquadratplusbequadrat* kann wohl fast jeder noch murmeln – und manche wissen auch, wie es weitergeht (nämlich: *istgleichcequadrat*). Gleichzeitig zeigen empirische Studien, dass die zentrale Bedeutung des Satzes für die euklidische Geometrie im Unterricht kaum noch vermittelt wird und er stattdessen meist in fraglich eingekleideten Anwendungsaufgaben mit zweifelhaftem Kontext auftritt.[5] Das Potential des Satzes ist

[4] Loomis, E. S. ([2]1940, Nachdruck 1968). *The Pythagorean Proposition. Its Demonstrations Analyzed and Classified and Bibliography of Sources for Data of the Four Kinds of „Proofs“.* Washington D.C.: The National Council of Teachers of Mathematics.

[5] „Es kann deshalb davon ausgegangen werden, dass beim Thema ‚Beweisen‘ eine größere Diskrepanz herrscht zwischen dem Anspruch, wie er sich beispielsweise in Bildungsstandards manifestiert, und der Wirklichkeit, realisiert als alltägliche Praxis des Mathematikunterrichts einzelner Lehrpersonen mit unterschiedlichen Lernenden und unterschiedlichen Lehrmitteln. Um den in den Bildungsstandards formulierten Anspruch bezüglich Begründens und Beweisens eher gerecht werden zu können, braucht es entsprechende Unterstützung für die Lehrpersonen, beispielsweise in Form einer knappen Darstellung wesentlicher theoretischer Grundlagen und deren Konkretisierung an Beispielen“ (Brunner 2014, S. 2).