

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Anfänge von Arithmetik und Algebra</b>	<b>1</b>
1.1	Zählen, Zahlen und Rechnen am Beginn . . . . .	2
1.2	Arithmetik und Algebra im alten Ägypten . . . . .	6
1.2.0	Abriss der kulturgeschichtlichen Entwicklung im Niltal	8
1.2.1	Altägyptische Zahlzeichen . . . . .	12
1.2.2	Arithmetik im alten Ägypten . . . . .	13
1.2.3	Primitive Algebra . . . . .	16
1.3	Mesopotamische (Babylonische) Algebra . . . . .	21
1.3.0	Entwicklung früher Hochkulturen in Mesopotamien . .	22
1.3.1	Zahlzeichen in Keilschrift . . . . .	28
1.3.2	Die Methode des einfachen falschen Ansatzes . . . . .	30
1.3.3	Lineare Gleichungssysteme . . . . .	32
1.3.4	Nichtlineare Systeme und quadratische Gleichungen .	35
1.3.5	Kubische Gleichungen: Der Beginn eines 3500 Jahre alten Problems . . . . .	39
1.3.6	Näherungswerte von $\sqrt{2}$ . . . . .	40
1.4	Aufgaben zu Kapitel 1 . . . . .	45
<b>2</b>	<b>Die geometrische Algebra der Griechen</b>	<b>47</b>
2.0	Einführung . . . . .	50
2.1	Beginn des abstrakten Denkens . . . . .	52
2.1.1	Ionische Periode (ca. 600–450 v. Chr.) . . . . .	53
2.1.2	Athenische Periode (450–300 v. Chr.) . . . . .	55
2.1.3	Hellenistische Periode (ca. 300 v. Chr.–ca. 150 n. Chr.)	59
2.1.4	Spätantike (ca. 150– ca. 500 n. Chr.) . . . . .	63
2.2	Das besondere Merkmal der griechischen Algebra . . . . .	65
2.3	Lineare und quadratische Gleichungen . . . . .	67
2.3.1	Die „Elemente“ des Euklid . . . . .	67
2.3.2	Die Methode der Flächenanlegung . . . . .	71
2.3.3	Lineare Gleichungen . . . . .	73
2.3.4	Rein quadratische Gleichungen . . . . .	74
2.3.5	Ein Diorismos . . . . .	75
2.3.6	Lösung quadratischer Gleichungen nach Euklid . . . .	78
2.4	Kubische und biquadratische Gleichungen . . . . .	80
2.4.1	Kubische Gleichungen in „Kugel und Zylinder“ von Archimedes . . . . .	80
2.4.2	Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks durch „Einschiebung“ von Archimedes . . . . .	85
2.4.3	Dreiteilung des Winkels nach Archimedes . . . . .	89
2.4.4	Archimedes und die biquadratischen Gleichungen . . .	90
2.4.5	Das Delische Problem – die Würfelverdopplung . . . .	91
2.5	Die Quadratur des Kreises mittels der Quadratrix . . . . .	96

2.6	„Formale Algebra“ . . . . .	100
2.6.1	Formale Algebra vor Diophant . . . . .	100
2.6.2	Synkopierte Algebra . . . . .	101
2.6.3	„Arithmetika“ von Diophant . . . . .	103
2.7	Aufgaben zu Kapitel 2 . . . . .	109
<b>3</b>	<b>Algebra im Orient</b> . . . . .	<b>111</b>
3.1	Algebra in China . . . . .	112
3.1.0	Geschichtlicher Abriss . . . . .	113
3.1.1	Zahlzeichen . . . . .	123
3.1.2	Quadrat- und Kubikwurzeln . . . . .	125
3.1.3	Der doppelte falsche Ansatz (Überschuss und Fehlbetrag) . . . . .	127
3.1.4	Lineare Gleichungssysteme . . . . .	128
3.1.5	Algebra im 13. Jahrhundert . . . . .	130
3.2	Algebra in Indien . . . . .	135
3.2.0	Geschichtlicher Abriss . . . . .	137
3.2.1	Zahlzeichen und das dezimale Stellenwertsystem . . . . .	141
3.2.2	Algebraische Ausdrucksweise . . . . .	144
3.2.3	Näherungsverfahren für Wurzeln . . . . .	145
3.2.4	Lineare Gleichungen . . . . .	146
3.2.5	Quadratische Gleichungen . . . . .	148
3.3	Algebra in den Ländern des Islam . . . . .	153
3.3.0	Geschichtlicher Abriss . . . . .	155
3.3.1	Die Verbreitung der indischen Ziffern in den islamischen Ländern . . . . .	169
3.3.2	Algebraische Ausdrucksweise . . . . .	171
3.3.3	Lineare und unbestimmte Gleichungen . . . . .	174
3.3.4	Quadratische Gleichungen . . . . .	175
3.3.5	Arithmetisierung der Algebra . . . . .	182
3.3.6	Die (geometrische) Theorie von ‘Umar Ḥayyām für die Gleichungen dritten Grades . . . . .	184
3.3.7	Eine Abhandlung von Ḥayyām über Algebra . . . . .	190
3.3.8	Gleichungen vierten Grades . . . . .	193
3.3.9	Numerische Auflösung algebraischer Gleichungen . . . . .	194
3.4	Aufgaben zu Kapitel 3 . . . . .	203
<b>4</b>	<b>Algebra im Europa des Mittelalters und der Renaissance</b> . . . . .	<b>207</b>
4.0	Einführung . . . . .	209
4.1	Übersetzungen aus dem Arabischen . . . . .	216
4.2	Leonardo von Pisa . . . . .	217
4.3	Jordanus Nemorarius und Johannes de Muris . . . . .	222
4.4	Die Entwicklung in Italien . . . . .	226
4.4.1	Luca Pacioli . . . . .	231
4.5	Entwicklungen in Westeuropa . . . . .	233

4.5.1	Nicolas Chuquet . . . . .	233
4.5.2	Robert Recorde . . . . .	234
4.5.3	Simon Stevin . . . . .	236
4.5.4	Pedro Nunes . . . . .	238
4.6	Frühe Algebra im deutschsprachigen Raum - die Deutsche Coß	241
4.6.1	Die sog. Deutsche Coß . . . . .	243
4.6.2	Adam Ries, Abraham Ries u. Jacob Ries als Cossisten	248
4.6.3	Christoph Rudolff und Michael Stifel . . . . .	254
4.7	Zur Entwicklung des Zahlbegriffes . . . . .	257
4.8	Aufgaben . . . . .	261
<b>5</b>	<b>Algebra wird zur selbständigen Disziplin (16.-18. Jh.)</b>	<b>265</b>
5.0	Historische Einführung . . . . .	267
5.1	Gleichungen dritten und vierten Grades . . . . .	270
5.1.1	Lösungen für Gleichungen dritten Grades . . . . .	270
5.1.2	Niccolò Tartaglia . . . . .	272
5.1.3	Girolamo Cardano . . . . .	275
5.1.4	Auflösung von Gleichungen vierten Grades . . . . .	279
5.1.5	Rafaello Bombelli . . . . .	280
5.2	Viète und Descartes . . . . .	284
5.2.1	François Viète (Franciscus Vieta) . . . . .	284
5.2.2	René Descartes (Cartesius) . . . . .	292
5.2.3	Die algebraischen Methoden von Descartes . . . . .	294
5.3	Newton und Euler . . . . .	301
5.3.1	Isaac Newton . . . . .	301
5.3.2	Zur Vorgeschichte des Fundamentalsatzes der Algebra	303
5.3.3	Leonhard Euler und der Fundamentalsatz der Algebra	305
5.3.4	Euler und sein Algebralehrbuch . . . . .	309
5.4	Aufgaben . . . . .	315
<b>6</b>	<b>Algebra in der 2. Hälfte des 18. und am Beginn des 19. Jahrhunderts</b>	<b>319</b>
6.0	Historische Einführung . . . . .	321
6.1	Die Begründung des Rechnens in gewöhnlichen Zahlbereichen	324
6.2	Die Begründung der komplexen Zahlen . . . . .	329
6.3	Algebra als Methode . . . . .	334
6.4	Lösbarkeit der allgemeinen Gleichung $n$ -ten Grades in Radikalen . . . . .	340
6.4.1	Die Ergebnisse von Lagrange . . . . .	342
6.4.2	Die Lösungsansätze von Vandermonde und Waring . .	345
6.4.3	Ruffini und erste Ergebnisse über Permutationsgruppen . . . . .	347
6.4.4	Gauß und die Auflösung der Kreisteilungsgleichung . .	349
6.4.5	Abels Beweis für die Nichtauflösbarkeit der allgemeinen Gleichung 5. Grades . . . . .	352

6.5	Zum Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra durch Gauß	355
6.6	Die Herausforderung der Algebra durch neue Objektbereiche	360
6.6.1	Determinanten . . . . .	360
6.6.2	Einfluss der „Disquisitiones arithmeticae“ von Gauß . . . . .	366
6.7	Aufgaben zu Kapitel 6 . . . . .	371
<b>7</b>	<b>Die Herausbildung erster Strukturbegriffe</b>	<b>373</b>
7.0	Vorbemerkungen . . . . .	375
7.1	Die Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen – Galois-Theorie	377
7.1.1	Der Beitrag von Niels Henrik Abel . . . . .	377
7.1.2	Die Lösung des Problems durch Évariste Galois . . . . .	381
7.2	Von Permutationen zu Permutationsgruppen . . . . .	389
7.3	Auf dem Weg zur abstrakten Algebra . . . . .	394
7.3.1	George Peacock . . . . .	397
7.3.2	Augustus de Morgan . . . . .	399
7.3.3	Duncan Farquharson Gregory . . . . .	402
7.3.4	George Boole und die Algebra der Logik . . . . .	404
7.4	Erste Definitionen abstrakter algebraischer Systeme . . . . .	408
7.4.1	William Rowan Hamilton und die Quaternionen . . . . .	408
7.4.2	Arthur Cayley – Oktonionen und die erste Definition des abstrakten Gruppenbegriffs . . . . .	417
7.5	Zahlentheoretische Einflüsse auf die Entwicklung der Algebra	422
7.5.1	Gaußsche ganze Zahlen und Reziprozitätsgesetze . . . . .	422
7.5.2	Kummers Schöpfung der idealen Zahlen . . . . .	428
7.6	Die Fortschritte in der linearen Algebra . . . . .	432
7.6.1	Die Entwicklung des Matrizenkalküls . . . . .	436
7.6.2	Die Entwicklung der Theorie der Vektorräume . . . . .	442
7.6.3	Die Arbeiten von Hermann Günther Graßmann . . . . .	446
7.7	Aufgaben zu Kapitel 7 . . . . .	457
<b>8</b>	<b>Die Entwicklungen der Algebra von 1850 bis 1880</b>	<b>463</b>
8.0	Vorbemerkungen . . . . .	465
8.1	Weitere Fortschritte im Verständnis der Galois-Theorie . . . . .	470
8.1.1	Die Rezeption der Galois-Theorie in Deutschland . . . . .	471
8.1.2	Die Darstellung der Galois-Theorie durch Joseph Alfred Serret und Camille Jordan . . . . .	474
8.2	Die große Zeit der Invariantentheorie . . . . .	483
8.2.1	Die britische Schule der Invariantentheorie . . . . .	484
8.2.2	Die Weiterentwicklung und die Formulierung des Grundproblems der Invariantentheorie . . . . .	487
8.3	Die Theorie der Transformationsgruppen . . . . .	491
8.3.1	Kleins Erlanger Programm und die Theorie der endlichen Transformationsgruppen . . . . .	491
8.3.2	Die Liesche Theorie der kontinuierlichen Transformationsgruppen . . . . .	498

8.4	Die ersten Strukturuntersuchungen bei hyperkomplexen Systemen . . . . .	503
8.4.1	Hankels „Theorie der complexen Zahlensysteme“ . . .	504
8.4.2	Die Klassifikation der Algebren bei Benjamin Peirce .	505
8.5	Aufgaben zu Kapitel 8 . . . . .	512
<b>9</b>	<b>Algebra an der Wende zum 20. Jahrhundert</b>	<b>513</b>
9.0	Historische Einführung . . . . .	516
9.1	Mengenlehre und Algebra der Logik . . . . .	520
9.1.1	Schröders Algebra der Logik und Freges Logizismus .	523
9.1.2	Die axiomatische Methode . . . . .	529
9.2	Die Herausbildung des abstrakten Gruppenbegriffs . . . . .	533
9.3	Dedekind und Kronecker: Algebraische Zahlen, Ideale und Divisoren, Körper . . . . .	548
9.4	Die axiomatische Fixierung des Körperbegriffs . . . . .	559
9.5	Die Profilierung weiterer Teilgebiete der Algebra . . . . .	572
9.5.1	Hyperkomplexe Systeme (Algebren) . . . . .	572
9.5.2	Darstellungen von Gruppen und Algebren . . . . .	583
9.5.3	Die algebraische Geometrie . . . . .	588
9.6	Aufgaben zu Kapitel 9 . . . . .	594
<b>10</b>	<b>Die Algebra im 20. Jahrhundert</b>	<b>599</b>
10.0	Historische Einführung . . . . .	603
10.1	Die Etablierung der modernen abstrakten Algebra . . . . .	608
10.1.1	Aufbau einer allgemeinen Ring- und Idealtheorie . . .	609
10.1.2	„Moderne Algebra“ . . . . .	614
10.2	Von der Algebra zur Mathematik der Strukturen . . . . .	621
10.2.1	Die Entstehung der Verbandstheorie . . . . .	623
10.2.2	Bourbaki und Strukturkonzepte . . . . .	629
10.3	Die Wechselwirkung der abstrakten Algebra . . . . .	634
10.3.1	Die algebraische Geometrie . . . . .	634
10.3.2	Anwendungen der Algebra in der Physik . . . . .	639
10.3.3	Die algebraische Durchdringung der Topologie . . . .	642
10.3.4	Algebraische Methoden in anderen Bereichen . . . . .	645
10.4	Computeralgebra . . . . .	649
10.4.1	Vorbemerkungen . . . . .	649
10.4.2	Charakterisierung der Computeralgebra . . . . .	651
10.4.3	Die Entwicklung von Algorithmen . . . . .	654
10.4.4	Die Entwicklung von Computeralgebrasystemen . . . .	662
10.4.5	Anwendungen der Computeralgebra, mathematische Bildung, Präsentation in der Gesellschaft . . . . .	663
10.5	Computeralgebra im Jahre 2013 . . . . .	665
10.5.1	Algorithmen . . . . .	666
10.5.1.1	Algorithmische Gruppentheorie . . . . .	666
10.5.1.2	Algorithmische algebraische Zahlentheorie . . . . .	668

## XIV INHALTSVERZEICHNIS

---

10.5.2	Software Systeme . . . . .	669
10.5.3	Anwendungen . . . . .	669
10.5.3.1	Der Zauberwürfel . . . . .	669
10.5.3.2	Die Nullstellen eines Polynoms . . . . .	671
10.5.3.3	Kristallographische Gruppen . . . . .	671
10.5.3.4	Robotik . . . . .	674
10.5.3.5	Kryptographie . . . . .	675
10.6	Aufgaben zu Kapitel 10 . . . . .	678
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>679</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>715</b>
	<b>Personenregister mit Lebensdaten</b>	<b>723</b>
	<b>Index</b>	<b>735</b>